§ 21. Теорема Бернсайда

Результаты, связанные с коммутаторной алгеброй, станут значительно более симметричными, если вместо представления T_g рассматривать множество всех линейных комбинаций операторов T_g. Это множество замкнуто относительно линейных операций и операции умножения, т. е. является матричной алгеброй. Мы приходим к вопросу об изучении матричных алгебр и их коммутаторных алгебр в связи с вопросами приводимости и полной приводимости.

Множество матриц в пространстве V называется *приводимым*, если существует нетривиальное подпространство V_0, инвариантное относительно всех этих матриц (т. е. относительно линейных операторов, определяемых этими матрицами). Соответственно вводятся понятия неприводимости и полной приводимости. Нашей основной целью будет изучение неприводимых матричных алгебр. Остановимся вначале на двух основных критериях неприводимости. Условимся рассматривать только алгебры с единицей.

1° Правило цикличности. *Матричная алгебра A неприводима тогда и только тогда, когда каждый вектор $\xi \in V$, $\xi \neq 0$, является циклическим в пространстве V относительно A, т. е. если V совпадает с совокупностью векторов вида $a\xi$, $a \in A$.*

Действительно, пусть $V_\xi = A\xi$ — циклическая оболочка вектора ξ относительно A, т. е. множество всех векторов вида $a\xi$, $a \in A$. Очевидно, V_ξ всегда инвариантно относительно A. Следовательно, если A неприводима, то $V_\xi = V$ для каждого $\xi \neq 0$. С другой стороны, если последнее условие выполняется, то ни один из векторов $\xi \neq 0$ не может содержаться в нетривиальном инвариантном подпространстве; следовательно, A неприводима.

2° Правило двойственности. *Матричная алгебра неприводима тогда и только тогда, когда неприводима алгебра $\tilde{A}$, составленная из всех транспонированных (относительно некоторого базиса) матриц a', $a \in A$.*

Действительно, операция транспонирования $\xi \to \xi'$, где вектор ξ рассматривается как вектор-столбец, ото-

ждествляет V с пространством V' всех линейных форм: $f(\xi) = x'\xi$, $\xi \in V$, $x \in V$. Если $V_0 \subset V$ — инвариантное подпространство относительно A, то его ортогональное дополнение $V_0^{\perp} \subset V'$ инвариантно относительно $\bar{A}$ ($V_0^{\perp}$ определяется как совокупность всех линейных форм, равных нулю на V_0). Для доказательства нашего утверждения достаточно теперь заметить, что нетривиальность V_0 равносильна нетривиальности $V_0^{\perp}$.

Докажем теперь одну из основных теорем в теории матричных алгебр *):

Теорема Бернсайда. *Всякая неприводимая матричная алгебра в комплексном векторном пространстве представляет собой полную матричную алгебру (алгебру всех линейных операторов) в данном пространстве.*

Доказательство. Пусть a_i — i-й столбец матрицы a. Если a пробегает A, то вектор a_i пробегает циклическую оболочку Ae_i, где e_i — i-й базисный вектор в пространстве V. Следовательно, если A неприводима, то каждый столбец a_i пробегает все n-мерное пространство V.

Пусть уже доказано, что прямоугольная матрица $[a]_p$, составленная из первых p столбцов матрицы a, пробегает pn-мерное пространство V_p, которое определяется как прямая сумма p экземпляров пространства V. Рассмотрим отдельно следующие две возможности:

а) Из равенства $[a]_p = 0$ следует $a_{p+1} = 0$ для всякого элемента $a \in A$.

б) Существует хотя бы одна матрица $a \in A$, для которой $[a]_p = 0$, но $a_{p+1} \neq 0$.

Если выполняется условие а), то a_{p+1} является однозначной функцией от вектора $[a]_p \in V_p$. Поскольку эта функция является линейной, то мы имеем

$$a_{p+1} = C_1 a_1 + C_2 a_2 + \ldots + C_p a_p,$$

где C_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, — линейные операторы в пространстве V. Заменим a на xa, где x — произвольная матрица из A; тогда каждый столбец a_i заменяется на

*) Другой вариант доказательства см. в [10].

xa_i, и мы имеем

$$x\sum_{i=1}^{p} C_i a_i = \sum_{i=1}^{p} C_i x a_i.$$

Поскольку мы предполагаем, что матрица $[a]_p$ принимает произвольные значения из V_p, то, очевидно, имеем отсюда

$$xC_i = C_i x.$$

(*Действительно, все векторы, кроме a_i, мы можем положить равными* 0; при этом a_i пробегает пространство V.) Следовательно, каждый оператор C_i перестановочен со всеми матрицами из A. Согласно лемме Шура заключаем отсюда, что $C_i = \lambda_i e$, где e — единичная матрица в пространстве V. В результате получаем

$$a_{p+1} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_p a_p.$$

Полученное равенство означает, что ни одна из строк матрицы a не пробегает n-мерного пространства (поскольку между координатами строки существует линейная зависимость). Согласно правилу двойственности это невозможно, ибо алгебра A неприводима. Полученное противоречие показывает, что случай а) не может иметь места.

Итак, мы показали, что выполняется условие б). Пусть I — множество всех элементов из A, для которых выполняется условие $[a]_p = 0$. Тогда мы имеем $AI \subset I$, т. е. I инвариантно относительно левых умножений на элементы $a \in A$ *). Отсюда следует, что для каждого $\xi \in V$ циклическая оболочка $I\xi$ инвариантна относительно A. Положим, в частности, $V_0 = Ie_{p+1}$. Согласно б) $V_0 \neq (0)$. Следовательно, $V_0 = V$. Поэтому, если a пробегает I, то вектор-столбец a_{p+1} пробегает пространство V. Но это означает, что $[a]_{p+1}$ пробегает V_{p+1}.

В результате мы имеем возможность индукции по индексу $p = 1, 2, \ldots, n$, и это доказывает теорему.

Следствие 1. *Если T_g — неприводимое представление группы G в комплексном пространстве V, то линейная оболочка операторов T_g совпадает с алгеброй всех линейных операторов пространства V.*

---

*) Всякое такое множество I называется *левым идеалом* в алгебре A.

Следствие 2. *Матричные элементы $\tau_{ij}(g)$ неприводимого представления T_g образуют систему линейно независимых функций на группе G.*

Действительно, условие линейной независимости может быть записано в виде $\operatorname{sp} CT_g = 0$, где C — постоянная матрица коэффициентов. Заменяя множество $\{T_g\}$ его линейной оболочкой, заключаем, что $\operatorname{sp} CX = 0$ для всякой матрицы X. Отсюда $C = 0$.

Следствие 3 (принцип взаимности*)). *Если A — вполне приводимая алгебра с единицей, то A' — также вполне приводимая алгебра с единицей, и при этом*

$$A'' = A,$$

т. е. коммутаторная алгебра коммутаторной алгебры A' совпадает с самой алгеброй A.

Несложное доказательство этого утверждения предоставляется читателю. Следствие 3 дает чрезвычайно ценную информацию о структуре вполне приводимой алгебры A. Действительно, пусть $A = \sum_{i=1}^{r} m_i A_i$ (прямая сумма), где A_i — неприводимая алгебра порядка n_i, входящая с кратностью m_i. Тогда всякий элемент $a \in A$ может быть записан следующим образом:

$$a = \sum_{i=1}^{r} (a_i \otimes e_i),$$

где a_i — произвольная матрица порядка n_i и e_i — единичная матрица порядка m_i. Согласно принципу взаимности всякая матрица $b \in A'$ имеет следующий вид:

$$b = \sum_{i=1}^{r} (e_i \otimes b_i),$$

где e_i — единичная матрица порядка n_i и b_i — произвольная матрица порядка m_i. В частности, мы видим, что алгебра A имеет размерность $\sum_{i=1}^{r} n_i^2$ и алгебра A' имеет размерность $\sum_{i=1}^{r} m_i^2$. Если алгебра A неприводима,

*) Эта теорема принадлежит Веддербёрну (см. [10]).

то она имеет размерность n^2 (n — размерность пространства V) и коммутаторная алгебра A' имеет размерность 1 (что уже известно нам из леммы Шура). Очевидно также, что лемма Шура в свою очередь может быть получена как следствие теоремы Бернсайда.

Упражнения

1. Пусть ξ_1, ξ_2 — два вектора в пространстве представления T_g, $g \in G$, циклическая оболочка каждого из которых неприводима. Положим $\xi = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2$. Выяснить условия, при которых циклическая оболочка вектора ξ также неприводима. (Указание: отдельно рассмотреть те случаи, когда неприводимые представления, содержащие ξ_1, ξ_2, эквивалентны и неэквивалентны.)

2. Пусть A — полная матричная алгебра $n \times n$. Показать, что всякое неприводимое (конечномерное) представление этой алгебры имеет размерность n, т. е. изоморфно алгебре A. Показать, что это представление может быть задано формулой $f(x) = axa^{-1}$, $x \in A$, где a — фиксированный обратимый оператор.

3. Пусть A — вполне приводимая матричная алгебра и A' — ее коммутант. Показать, что в A' содержатся проекторы на все подпространства, неприводимые относительно A. Показать, что в A' содержатся все переплетающие операторы для неприводимых компонент алгебры A. Когда то же верно при перемене ролей A' и A?

§ 22. Групповые алгебры и их представления

В предыдущих рассмотрениях настоятельно чувствовалась необходимость «расширения» группы до алгебры, т. е. введения дополнительных линейных операций *). Эта процедура может быть осуществлена весьма различными способами.

1° Свободная линейная оболочка. Если G — абстрактная группа, то мы можем рассматривать формальные линейные комбинации

$$x = \sum_{i=1}^{N} c_i g_i, \qquad g_i \in G,$$

где N — произвольное число (ограниченное, если группа конечна). Это равносильно построению линейного пространства C, в котором элементы группы G играют роль (алгебраического) базиса. Избавляясь от индекса i, мы можем записывать линейные комбинации x в виде

*) Эта процедура является естественной также с точки зрения физики (принцип линейной суперпозиции).