

до представления всей ассоциативной оболочки \mathfrak{A} . Ассоциативная оболочка \mathfrak{A} называется также *универсальной обертывающей алгеброй Ли**).

Интересно отметить, что *алгебра \mathfrak{A} оказывается изоморфной алгебре обобщенных функций на группе G с носителем в точке e* .

Все эти конструкции, чрезвычайно интересные для теории представлений, мы вводим пока лишь формально, в виде общих определений. Некоторые из них, например групповая алгебра конечной группы и универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли, будут существенно использованы в дальнейшем **).

§ 23. Формулировка основных задач

Из вышесказанного можно заключить, что основная задача теории представлений состоит в их «спектральном анализе», т. е. в разложении произвольных представлений на неприводимые. Однако в действительности эта задача обладает более разнообразными аспектами. Прежде всего, выделяются следующие самостоятельные задачи:

1. *Описать все неприводимые представления (с точностью до эквивалентности) данной группы G .*
2. *Выяснить вопрос о возможности полной приводимости (в том или ином классе групп и их представлений).*
3. *Описать (если они существуют) представления приводимые, но неразложимые, т. е. неразложимые в прямую сумму хотя бы двух представлений.*

Далее, если ограничиться более простым классом вполне приводимых представлений, то естественно ожидать, что они разлагаются (в конечную сумму или абстрактный интеграл) по неприводимым представлениям. Это действительно так в конечномерном или унитарном случае. Изучение вполне приводимых представлений сводится при этом к спектральному анализу и изучению

*) Более подробное определение см. в § 58.

**) См. также [127].

отдельных неприводимых компонент. Здесь в свою очередь особо выделяются следующие задачи:

4. *Разложение регулярного представления группы G .*
 5. *Сужение неприводимых представлений с группы на подгруппу* (дано неприводимое представление группы G , вполне приводимое относительно погруппы H ; требуется разложить его на неприводимые по отношению к H).

6. *Описание алгебры неприводимых представлений по отношению к тензорному произведению.*

В действительности некоторые из этих задач взаимосвязаны. В частности, поскольку регулярное представление является, как мы знаем, «вместилищем» всех неприводимых представлений группы G (§ 18), спектральный анализ этого представления может явиться источником для решения задачи 1. Далее, если перейти к проблеме классификации функций на однородном многообразии, то возникают следующие вопросы:

7. *Аппроксимация функций на группе G и многообразии X «элементарными гармониками» группы G . Описание специальных функций, связанных с этими гармониками.*

8. *Вопросы комплексификации (группы Ли, ее представлений, однородных многообразий).*

9. *Симметрия уравнений, в частности дифференциальных и интегральных, по отношению к группам и алгебрам Ли. Аналоги операторов Лапласа для группы Ли.*

Специально отметим также следующую классическую задачу:

10. *Разложение произвольных тензоров по отношению к данной линейной группе G .*

Гармонический анализ на группе тесно связан с изучением групповых алгебр относительно свертки на группе G . Особый интерес представляет изучение «двойственности» между группой G и множеством \widehat{G} , составленным из элементарных гармоник на G . Если G — коммутативная группа, то между G и \widehat{G} существует своеобразная симметрия, которая проявляется, в частности, в аналогии между прямым и обратным преобразованиями Фурье. В общем случае ситуация является значительно более сложной. Возникает задача:

*11. Изучение групповых алгебр относительно свертки на группе G . Построение общей теории двойственности *).*

Заметим, что решение последней задачи, несомненно, открыло бы ряд новых закономерностей в теории представлений. Наконец, в общей теории групп важное значение имеет следующая задача:

12. Выяснить, допускает ли данная абстрактная группа G точное линейное представление, т. е. возможна ли ее изоморфная реализация в виде группы матриц.

В настоящее время известно (см., например, §§ 31, 104), что для «большого числа» важных классов групп Ли проблема 12 решена положительно. Пример отрицательного решения приводится на стр. 469.

Более точная постановка и решение некоторых задач для отдельных классов групп будут изложены в этой книге.

* * *

Доказанные в этой главе фундаментальные результаты теории конечномерных представлений (лемма Шура, теорема Бернсайда) сохраняют свой вид над произвольным алгебраически замкнутым полем (заметим, что при доказательстве леммы Шура использовалось существование корней векового уравнения $\det(B - \lambda A) = 0$), но требуют иной формулировки в общем случае, найти которую можно, например, в книге Г. Вейля [10].

После того как эти результаты получены, можно наиболее просто построить теорию представлений для произвольных конечных групп. Однако в следующей главе мы сразу перейдем к рассмотрению значительно более широкого класса групп, так называемых компактных групп Ли, изучение которых и является основным предметом этой книги.

*) См. по этому поводу § 107. См. также замечание в [18] относительно связи между матричными элементами и коэффициентами Клебша — Гордана.