ГЛАВА IV

КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ ЛИ. ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

В настоящей главе мы вводим основные объекты, изучаемые в этой книге, — компактные группы Ли. Применение специального метода «усреднения» позволяет для данного класса групп получить замечательное обобщение теории классических рядов Фурье. Получаемая теория имеет дело с «элементарными гармониками», т. е. неприводимыми представлениями группы G, и содержит в себе основную информацию о строении этих представлений.

§ 24. Определение компактной группы

В абстрактной топологии важную роль играет различие между компактными и некомпактными множествами. Множество K в метрическом пространстве называется *компактным*, если оно замкнуто и может быть покрыто конечным числом шаров радиуса ε при сколь угодно малом ε. По образному выражению Г. Вейля, все «жители» области K находятся под охраной конечного числа «милиционеров» (центры шаров) при условии, что каждый милиционер имеет радиус действия ε. Оказывается, что условие компактности равносильно выполнению любого из следующих двух утверждений, которые лежат в основе многих результатов классического анализа.

Лемма Больцано — Вейерштрасса. *Из всякого бесконечного подмножества множества K можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в K.*

Лемма Гейне — Бореля. *Из всякого бесконечного покрытия множества K системой открытых множеств можно выбрать конечное подпокрытие.*

Поскольку эти утверждения не опираются на понятие метрики, они используются для определения компактности в топологических пространствах, более общих, чем метрические. Наконец, как легко видеть, если множество K расположено в евклидовом пространстве (с обычной топологией), то требование компактности равносильно замкнутости и ограниченности множества K.

Топологическая группа G называется *компактной*, если она компактна как топологическое пространство. Примеры:

1. *Ортогональная группа* $\mathrm{O}(n)$ *в вещественном пространстве компактна.* Действительно, элементы $g \in \mathrm{O}(n)$ выделяются среди n-мерных матриц условием

$$g'g = e,$$

которое равносильно ортогональности репера, соответствующего матрице g. Следовательно,

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} g_{ij}^2 = n$$

и группа $\mathrm{O}(n)$ является подмножеством на сфере радиуса $\sqrt{n}$ в евклидовом пространстве размерности n^2. Следовательно, множество $\mathrm{O}(n)$ ограничено и, кроме того, оно замкнуто, поскольку условие $g'g = e$ сохраняется при предельном переходе.

2. *Унитарная группа* $\mathrm{U}(n)$ *компактна.* Доказательство аналогично предыдущему, с заменой прежнего условия условием $g^*g = e$ для матрицы $g \in \mathrm{U}(n)$. Впрочем, $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{O}(2n)$ (замена комплексных координат вещественными) и $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{U}(n)$.

3. *Группы* $\mathrm{O}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{U}(p, q)$ *при* $p, q \neq 0$ *некомпактны.* Действительно, все эти группы наряду с обычными поворотами содержат также систему гиперболических поворотов вида

$$v(t) = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{Vmatrix},$$

которые действуют в двумерных плоскостях. Поскольку такая подгруппа $v(t)$ гомеоморфна неограниченной пря-

мой, то и каждая из данных групп неограничена как множество.

Топологическое пространство называется *локально компактным*, если каждая его точка обладает окрестностью с компактным замыканием. Соответственно вводится понятие локально компактной группы. Очевидно, для локальной компактности группы достаточно, в силу принципа однородности, существования окрестности с компактным замыканием хотя бы для точки e.

Если ограничиться классом групп Ли, то в силу их локальной евклидовости они *всегда локально компактны*.

Наконец, если группа не компактна и даже не локально компактна, то она может быть названа *существенно некомпактной*. Группа унитарных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве является примером такой группы *).

Одним из основных результатов теории групп является установление принципиального различия между представлениями компактных и некомпактных групп Ли. В частности, мы увидим, что гармонический анализ на компактной группе Ли сводится к рядам, в то время как на локально компактной группе Ли — к обобщенным интегралам Фурье. В основе этого различия лежит следующее очевидное свойство:

1° *Всякая компактная группа Ли имеет конечный объем (относительно меры Хаара).*

Мы предоставляем читателю детальное доказательство этого утверждения. Отметим еще одно свойство меры Хаара, которое является следствием свойства 1°:

2°. *На компактной группе Ли всякая мера Хаара является двусторонне инвариантной и инвариантной по отношению к инверсии.*

Действительно, если $d\mu(g)$ — левоинвариантная мера Хаара, то мера $d\mu(gg_0)$ снова является левоинвариантной и поэтому в силу принципа единственности отличается

*) Некомпактность единичной сферы в гильбертовом пространстве является «первопричиной» принципиально новых закономерностей в теории линейных операторов. Если бы эта сфера была компактной, то всякий непрерывный линейный оператор в гильбертовом (и также в банаховом) пространстве имел бы дискретный спектр.

от $d\mu(g)$ лишь умножением на константу:

$$d\mu(gg_0) = c\, d\mu(g)$$

(константа c зависит от g_0). Интегрируя обе части этого равенства по группе G, заметим, что точка $h = gg_0$ пробегает (при фиксированном g_0) также всю группу G, откуда ясно, что $\int d\mu(h) = \int d\mu(g) = V$, где V — конечный объем группы G. Следовательно,

$$V = cV$$

и $c = 1$; но это и означает, что мера $d\mu(g)$ является правоинвариантной. Далее, мера $d\mu(g^{-1})$ снова является инвариантной, откуда $d\mu(g^{-1}) = k\, d\mu(g)$, где k — константа, и прежний прием позволяет заключить, что $k = 1$.

Двусторонне инвариантную меру Хаара на группе G мы условимся ради краткости обозначать просто символом dg. Условие

$$\int |f(g)|^2 dg < \infty$$

выделяет гильбертово пространство числовых функций на группе G, которое принято обозначать $L^2(G)$. Если группа G компактна, то для меры Хаара мы будем использовать нормировку

$$\int dg = 1,$$

которая означает, что полный объем всей группы полагается равным единице.

§ 25. Формулировка глобальной теоремы

Для компактной группы Ли удается в принципе решить все основные проблемы, связанные с теорией представлений. Окончательный результат мы сформулируем в виде перечня законов, называемого здесь «глобальной теоремой».

Теорема 1 (глобальная теорема). *Если G — компактная группа Ли, то она обладает следующими свойствами:*