

от $d\mu(g)$ лишь умножением на константу:

$$d\mu(gg_0) = c d\mu(g)$$

(константа c зависит от g_0). Интегрируя обе части этого равенства по группе G , заметим, что точка $h = gg_0$ пробегает (при фиксированном g_0) также всю группу G , откуда ясно, что $\int d\mu(h) = \int d\mu(g) = V$, где V — конечный объем группы G . Следовательно,

$$V = cV$$

и $c = 1$; но это и означает, что мера $d\mu(g)$ является правоинвариантной. Далее, мера $d\mu(g^{-1})$ снова является инвариантной, откуда $d\mu(g^{-1}) = k d\mu(g)$, где k — константа, и прежний прием позволяет заключить, что $k = 1$.

Двусторонне инвариантную меру Хаара на группе G мы условимся ради краткости обозначать просто символом dg . Условие

$$\int |f(g)|^2 dg < \infty$$

выделяет гильбертово пространство числовых функций на группе G , которое принято обозначать $L^2(G)$. Если группа G компактна, то для меры Хаара мы будем использовать нормировку

$$\int dg = 1,$$

которая означает, что полный объем всей группы полагается равным единице.

§ 25. Формулировка глобальной теоремы

Для компактной группы Ли удается в принципе решить все основные проблемы, связанные с теорией представлений. Окончательный результат мы сформулируем в виде перечня законов, называемого здесь «глобальной теоремой».

Теорема 1 (глобальная теорема). *Если G — компактная группа Ли, то она обладает следующими свойствами:*

1. *G имеет точное линейное представление.*
2. *Все неприводимые *) представления группы G имеют конечную размерность и содержатся в классе тензоров (над тем линейным пространством, где G имеет точное представление).*
3. *Все конечномерные представления группы G эквивалентны унитарным и обладают свойством полной приводимости **).*
4. *Число неприводимых представлений группы G (определенных с точностью до эквивалентности) конечно или счетно ***), причем конечно только в случае, когда группа G конечна.*

5. *Всякая непрерывная функция $f(g)$ на группе G может быть равномерно, с любой степенью точности, аппроксимирована линейными комбинациями матричных элементов*

$$\tau_{ij}^l(g),$$

*где индекс l означает нумерацию всевозможных неприводимых представлений, а индексы i, j — обычные матричные индексы относительно произвольного базиса ****).*

6. *Если матрица $\tau^l(g) = \|\tau_{ij}^l(g)\|$ записана в базисе, относительно которого она унитарна, то система матричных элементов $\tau_{ij}^l(g)$ представляет собой полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $H = L^2(G)$. Все элементы $\tau_{ij}^l(g)$ при фиксированном l имеют одинаковую норму, равную $n^{-\frac{1}{2}}$, где $n = n(l)$ — размерность представления τ^l .*

7. *Если функция $f(g)$ содержится в $L^2(G)$, то ее ряд Фурье*

$$f(g) \sim \sum_{l, i, j} c_{ij}^l \tau_{ij}^l(g),$$

*) А priori бесконечномерные; при этом мы имеем в виду понятие топологической неприводимости (см. стр. 89).

**) Это замечательное свойство называется *принципом полной приводимости*.

***) Эта часть утверждения является очевидным следствием свойства 2 (действительно, тензорная алгебра имеет счетный базис).

****) Эта часть теоремы носит название «основной аппроксимационной теоремы» Петера — Вейля [124].

где $c_{ij}^l = n(f, \tau_{ij}^l)$, сходится к этой функции в среднем квадратичном.

З а м е ч а н и е. В действительности мы увидим (дополнение I, § 2), что ряд Фурье сходится равномерно, если функция $f(g)$ достаточное число раз дифференцируема (по параметрам группы G), и тем быстрее, чем выше степень гладкости функции f .

Напомним, что символ (f, φ) , использованный в формулировке теоремы, означает скалярное произведение двух произвольных функций из H :

$$(f, \varphi) = \int f(g) \overline{\varphi(g)} dg.$$

Ортогональность понимается также по отношению к этому скалярному произведению. В § 32 мы опишем также переход к произвольному однородному пространству с группой движений G .

Доказательство теоремы будет разбито на несколько частей.

§ 26. Прием усреднения *)

В основе доказательства глобальной теоремы лежит операция *усреднения* произвольной непрерывной функции — числовой, операторной или векторной — на группе G . Этот прием в теорию представлений был введен, по-видимому, Гурвицем. Если функция $f(g)$ непрерывна на компактном множестве K , то она ограничена (аналог известной теоремы Вейерштрасса)**); следовательно, среднее значение

$$[f] = \frac{1}{|G|} \int f(g) dg,$$

где $|G| = \int dg$, существует. Используя нормировку $|G| = 1$, рассмотрим, в частности, произвольное линей-

*) Здесь и в следующем параграфе роль группы G может играть произвольная компактная группа с мерой Хаара (не обязательно группа Ли).

**) Действительно, если функция $f(g)$ принимает неограниченно возрастающие значения на последовательности точек g_n , то, выбирая подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $g_0 \in K$, находим $f(g_0) = \infty$, что невозможно.