

§ 27. Свойство ортогональности

Пусть T_g, S_g — два неприводимых представления группы G , матрицы которых

$$T_g = \|\tau_{ij}(g)\|, \quad S_g = \|\sigma_{\mu\nu}(g)\|,$$

$i, j = 1, 2, \dots, n; \mu, \nu = 1, 2, \dots, m$, записаны по отношению к тем базисам, в которых они унитарны. Рассматривая тензорное произведение

$$U_g = T_g \otimes \hat{S}_g,$$

где $\hat{S}_g = S_g'^{-1}$ — представление, контрагredientное S_g , напомним следствие 2 из леммы Шура, согласно которому, если T_g и S_g неэквивалентны, то представление U_g не содержит ненулевых инвариантов. Следовательно, в этом случае

$$[U_g] = 0. \quad (*)$$

Подставляя выражения отдельных матричных элементов представления U_g через матричные элементы представлений T_g, S_g , заметим, что $\hat{S}_g = S_g'^{-1} = \bar{S}_g$, где черта означает комплексное сопряжение каждого элемента матрицы S_g . В результате матричное равенство (*) заменяется системой числовых равенств

$$\int \tau_{ij}(g) \overline{\sigma_{\mu\nu}(g)} dg = 0,$$

которые в совокупности означают *ортогональность* между матричными элементами T_g, S_g .

Положим теперь $S_g = T_g$ и реализуем представление T_g в классе прямоугольных матриц (§ 20):

$$U_g z = T_g z T_g^{-1}.$$

Поскольку в классе этих матриц имеются лишь инварианты λe , где λ — произвольное число, то усредненная матрица $z_0 = [U_g z]$ должна совпадать с одним из таких инвариантов:

$$[U_g z] = \lambda e$$

для любого z . Для определения $\lambda = \lambda(z)$ произведем вычисление *следа* левой и правой части, учитывая, что

$\text{sp } U_g z = \text{sp } z$; в результате находим

$$\text{sp } z = \lambda \cdot \text{sp } e = \lambda n,$$

где n — размерность матрицы e . Следовательно, $\lambda = \frac{1}{n} \text{sp } z$, и мы получаем окончательно

$$[U_g z] = \frac{1}{n} (\text{sp } z) e.$$

Полагая, в частности, $z = e_{ij}$, где матрица e_{ij} содержит единицу на пересечении i -й строки с j -м столбцом и нули на остальных местах, находим, что матрица $U_g z = T_g z T_g^{-1} = T_g z T_g^*$ состоит из элементов $\tau_{pi}(g) \overline{\tau_{qj}(g)}$, $p, q = 1, 2, \dots, n$. Следовательно,

$$\int \tau_{pi}(g) \overline{\tau_{qj}(g)} dg = \frac{1}{n} (\text{sp } e_{ij}) \delta_{pq} = \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta_{pq},$$

где δ_{ij} , δ_{pq} — символы Кронекера (действительно, $\text{sp } e_{ij} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$). В результате мы видим, что имеет место

Лемма 4. Матричные элементы двух неприводимых неэквивалентных представлений группы G взаимно ортогональны. Матричные элементы каждого неприводимого представления группы G ортогональны между собой и все имеют одинаковую норму, равную $n^{-\frac{1}{2}}$, где n — размерность данного представления.

§ 28. Аппроксимационная лемма для линейной группы G

Мы желаем пока миновать самую сложную часть теоремы, которая касается точной линейной представимости группы G . Поэтому будем считать, что группа G линейна, и докажем все остальные утверждения теоремы.

Лемма 5. Пусть $\tau^l(g)$ — система всевозможных неприводимых представлений, которые встречаются при разложении тензоров, преобразуемых группой G . Тогда всякая непрерывная функция $f(g)$ может быть равномерно, с любой степенью точности, аппроксимирована линейными комбинациями матричных элементов $\tau_{ij}^l(g)$.