$\operatorname{sp} U_g z = \operatorname{sp} z$; в результате находим

$$\operatorname{sp} z = \lambda \cdot \operatorname{sp} e = \lambda n,$$

где n — размерность матрицы e. Следовательно, $\lambda = \frac{1}{n} \operatorname{sp} z$, и мы получаем окончательно

$$[U_g z] = \frac{1}{n} (\operatorname{sp} z) e.$$

Полагая, в частности, $z = e_{ij}$, где матрица e_{ij} содержит единицу на пересечении i-й строки с j-м столбцом и нули на остальных местах, находим, что матрица $U_g z = T_g z T_g^{-1} = T_g z T_g^*$ состоит из элементов $\tau_{pi}(g) \overline{\tau_{qj}(g)}$, $p, q = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно,

$$\int \tau_{pi}(g) \overline{\tau_{qj}(g)}\, dg = \frac{1}{n} (\operatorname{sp} e_{ij})\, \delta_{pq} = \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta_{pq},$$

где δ_{ij}, δ_{pq} — символы Кронекера (действительно, $\operatorname{sp} e_{ij} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$). В результате мы видим, что имеет место

Лемма 4. *Матричные элементы двух неприводимых неэквивалентных представлений группы G взаимно ортогональны. Матричные элементы каждого неприводимого представления группы G ортогональны между собой и все имеют одинаковую норму, равную $n^{-1/2}$, где n — размерность данного представления.*

§ 28. Аппроксимационная лемма для линейной группы G

Мы желаем пока миновать самую сложную часть теоремы, которая касается точной линейной представимости группы G. Поэтому будем считать, что *группа G линейна*, и докажем все остальные утверждения теоремы.

Лемма 5. *Пусть $\tau^l(g)$ — система всевозможных неприводимых представлений, которые встречаются при разложении тензоров, преобразуемых группой G. Тогда всякая непрерывная функция $f(g)$ может быть равномерно, с любой степенью точности, аппроксимирована линейными комбинациями матричных элементов $\tau^l_{ij}(g)$.*

Наиболее просто лемма 5 может быть доказана с помощью теоремы Стоуна — Вейерштрасса, известной из функционального анализа *). Утверждение этой теоремы состоит в следующем. Допустим, что $\mathfrak{A}$ — некоторое множество непрерывных функций на компакте X, обладающее свойствами:

1° $\mathfrak{A}$ является алгеброй (по отношению к обычному сложению и умножению функций);

2° $\mathfrak{A}$ содержит единицу (т. е. функцию $f_0(x) \equiv 1$);

3° вместе с каждой функцией $f(x)$ $\mathfrak{A}$ содержит функцию $\overline{f(x)}$;

4° $\mathfrak{A}$ «разделяет точки» компакта X в том смысле, что для любой пары точек x_1, x_2 найдется функция $f \in \mathfrak{A}$, принимающая в x_1, x_2 различные значения.

Тогда любая непрерывная функция $\varphi(x)$ на компакте X может быть равномерно аппроксимирована элементами алгебры $\mathfrak{A}$.

Предположим теперь, что множество $\mathfrak{A}$ определяется, согласно условиям леммы, как линейная оболочка матричных элементов τ^l_{ij}, и докажем, что в этом случае свойства 1°—4° выполняются. Действительно, если перемножить два матричных элемента, то мы получаем матричный элемент представления $\tau^l \otimes \tau^{l'}$, которое снова содержится в классе тензоров и, следовательно, разлагается по некоторым неприводимым представлениям $\tau^{l_1}, \tau^{l_2}, \ldots, \tau^{l_k}$ (правило полной приводимости), но тогда изучаемый матричный элемент является линейной комбинацией матричных элементов этих неприводимых представлений, т. е. содержится в множестве $\mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{A}$ является алгеброй. Поскольку в число тензоров включаются и тензоры нулевого ранга (скаляры), то $\mathfrak{A}$ содержит единицу. Далее, функция $\overline{\tau^l_{ij}(g)}$ является матричным элементом представления $\overline{\tau^l(g)} = \tau^l(g)'^{-1}$, которое контрагредиентно $\tau^l(g)$ и поэтому также содержится в классе тензоров. Наконец, поскольку группа линейна, то сама матрица g (преобразующая тензоры первого ранга, т. е. векторы) разделяет точки группы. Лемма доказана.

---

*) См., например, [35], стр. 19.

Впрочем, поскольку G содержится в евклидовом пространстве, при доказательстве этой леммы можно было бы воспользоваться и классической теоремой Вейерштрасса.

§ 29. Ряды Фурье на линейной группе G

Каждой квадратично интегрируемой функции $f(g)$ на группе G поставим в соответствие набор ее «коэффициентов Фурье»:

$$c_{ij}^l = (f, e_{ij}^l),$$

где $e_{ij}^l = n^{1/2}\tau_{ij}^l$ — система нормированных матричных элементов из леммы 5 (нормированных таким образом, чтобы $\|e_{ij}^l\| = 1$, где $\|f\|$ — норма в пространстве H). Упрощая обозначения, запишем это определение в виде

$$c_\nu = (f, e_\nu),$$

где ν означает сложный индекс, составленный из индексов l, i, j. Поскольку значения этого индекса пробегают счетное множество, мы можем осуществить перенумерацию таким образом, чтобы $\nu = 1, 2, \ldots$ Пусть L_n — линейная оболочка векторов e_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Выражение $\rho_n = \min\limits_{\tau \in L_n} \|f - \tau\|$ представляет собой «среднее квадратичное отклонение» функции f от линейного подпространства L_n. Если $\tau = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu e_\nu$, то мы имеем *)

$$\|f - \tau\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \bar{c}_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}_\nu c_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu - c_\nu|^2.$$

Поскольку $\|f\|$ и коэффициенты c_ν зависят только от функции f, то ясно, что $\min \|f - \tau\|$ достигается в точности при $a_\nu = c_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, откуда $\rho_n = \|f - s_n\|$,

*) Здесь мы повторяем рассуждения, обычные при построении рядов Фурье.