Впрочем, поскольку G содержится в евклидовом пространстве, при доказательстве этой леммы можно было бы воспользоваться и классической теоремой Вейерштрасса.

§ 29. Ряды Фурье на линейной группе G

Каждой квадратично интегрируемой функции $f(g)$ на группе G поставим в соответствие набор ее «коэффициентов Фурье»:

$$c_{ij}^{l} = (f,\ e_{ij}^{l}),$$

где $e_{ij}^{l} = n^{1/2}\tau_{ij}^{l}$ — система нормированных матричных элементов из леммы 5 (нормированных таким образом, чтобы $\|e_{ij}^{l}\| = 1$, где $\|f\|$ — норма в пространстве H). Упрощая обозначения, запишем это определение в виде

$$c_{\nu} = (f,\ e_{\nu}),$$

где ν означает сложный индекс, составленный из индексов l, i, j. Поскольку значения этого индекса пробегают счетное множество, мы можем осуществить перенумерацию таким образом, чтобы $\nu = 1, 2, \ldots$ Пусть L_n — линейная оболочка векторов e_{ν}, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Выражение $\rho_n = \min\limits_{\tau \in L_n} \|f - \tau\|$ представляет собой «среднее квадратичное отклонение» функции f от линейного подпространства L_n. Если $\tau = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{\nu} e_{\nu}$, то мы имеем *)

$$\|f - \tau\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu}\bar{c}_{\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}_{\nu} c_{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\nu}|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} |c_{\nu}|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\nu} - c_{\nu}|^2.$$

Поскольку $\|f\|$ и коэффициенты c_{ν} зависят только от функции f, то ясно, что $\min \|f - \tau\|$ достигается в точности при $a_{\nu} = c_{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, откуда $\rho_n = \|f - s_n\|$,

*) Здесь мы повторяем рассуждения, обычные при построении рядов Фурье.

где $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e_\nu$ — частичная сумма ряда Фурье, и, кроме того,

$$\rho_n = \|f\|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu|^2. \qquad (*)$$

Допустим вначале, что функция f непрерывна, и выберем n настолько большим, чтобы $\max_G |f(g) - \tau_n(g)| < \varepsilon$ при некотором $\tau_n \in L_n$ (возможность такого выбора следует из аппроксимационной леммы); тогда мы имеем

$$\rho_n = \min_{\tau \in L_n} \|f - \tau\| \leqslant \|f - \tau_n\| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\|f - s_n\| < \varepsilon$ при найденном n и $f = \lim_{n\to\infty} s_n$. Кроме того, переходя к пределу в (*), получаем равенство Парсеваля:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^2 = \|f\|^2.$$

Наконец, если f — произвольная функция из H, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует, как известно, непрерывная функция φ, квадратичное отклонение которой от f не превосходит ε; следовательно,

$$\|f - \tau_n\| \leqslant \|f - \varphi\| + \|\varphi - \tau_n\| < 2\varepsilon,$$

и все предыдущие рассуждения снова можно повторить. В результате получена

Лемма 6. *Если G — линейная компактная группа, то для каждой функции $f \in L^2(G)$ ее ряд Фурье сходится к этой функции в среднем квадратичном:*

$$f = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e_\nu,$$

и при этом выполняется равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^2.$$

В заключение заметим, что если f, φ — произвольные элементы из H, то из равенства Парсеваля следует обычное равенство для скалярных произведений:

$$(f, \varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \bar{\gamma}_\nu,$$

где γ_ν — коэффициенты Фурье функции φ. Заметим также, что, как следует из проведенного построения, разложение в ряд Фурье определяется однозначно.

§ 30. Завершение доказательства для линейной группы G

Возвращаясь к первоначальным обозначениям для матричных элементов, получаем сокращенную запись ряда Фурье:

$$f(g) = \sum_l \operatorname{sp} c^l \tau^l(g),$$

где $c^l = \| c^l_{ji} \| \cdot n^{1/2}$ — матрица, составленная из коэффициентов Фурье функции f с фиксированным номером l. Непосредственное выражение для матрицы c^l дается, очевидно, формулой

$$c^l = n(f, \tau^l(g)'),$$

где штрих означает транспонирование. Если в группе G происходит правый сдвиг g_0, то каждое слагаемое в этой сумме заменяется выражением

$$\operatorname{sp} c^l \tau^l(gg_0) = \operatorname{sp} c^l \tau^l(g)\, \tau^l(g_0) = \operatorname{sp} \tau^l(g_0)\, c^l \tau^l(g),$$

откуда ясно, что преобразованная функция $\tilde{f}(g) = f(gg_0)$ имеет коэффициентами Фурье матрицы

$$\tilde{c}^l = \tau^l(g_0)\, c^l.$$

Полученный результат естественно интерпретируется как разложение правого регулярного представления на неприводимые. Действительно,

$$H = \sum_l H^l$$

(прямая ортогональная сумма), где каждое слагаемое H^l конечномерно и изоморфно пространству всех ма-