Теорема доказана.

Таким образом, существует универсальная конструкция для классификации функций на произвольном однородном многообразии X с компактной группой движений G (очевидно, X в этом случае также компактно). В частности, всякая непрерывная функция на X допускает разложение в «ряд Фурье». Привлекая дополнительные построения (см. добавление I, § 2), нетрудно также показать, что чем сильнее гладкость функции $f(x)$, тем быстрее сходится соответствующий ряд Фурье.

§ 33. Характеры

Если G — компактная группа, то для каждой пары функций $x(g)$, $y(g) \in L^2(G)$ их свертка

$$z(g) = \int x(gh^{-1})\, y(h)\, dh$$

снова квадратично интегрируема, т. е. $z(g) \in L^2(G)$. Следовательно, пространство $\mathfrak{H} = L^2(G)$ является *алгеброй* относительно этой свертки. То же самое можно сказать о пространстве $C(G)$ всех непрерывных функций на группе G. Представляет интерес, с точки зрения теории представлений, найти центр $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{H}$, т. е. совокупность всех функций, перестановочных (относительно свертки) с произвольными функциями из $\mathfrak{H}$. Производя несложное вычисление, получаем, что условие

$$z(g_0 g g_0^{-1}) = z(g), \qquad (*)$$

выполняемое при всех $g_0 \in G$, необходимо и достаточно для принадлежности функции $z(g)$ центру $\mathfrak{Z}$. Всевозможные точки $g_0 g g_0^{-1}$, получаемые внутренними автоморфизмами из точки g, называются сопряженными между собой; совокупность всех таких точек (при фиксированном g) называется *классом сопряженных элементов*. Таким образом, условие $(*)$ можно выразить, сказав, что функция $z(g)$ постоянна на каждом классе сопряженных элементов.

Примером функции такого типа является функция

$$z(g) = \operatorname{sp} T_g,$$

где T_g — произвольное (конечномерное) представление группы G. В частности, если T_g — оператор неприводимого представления δ, то для соответствующей функции $z(g)$ введем обозначение $\chi_\delta(g)$.

Функция $\chi_\delta(g)$ называется *характером* представления δ. Следствием глобальной теоремы является

Теорема 3. *Всякая функция $z(g)$, постоянная на классах сопряженных элементов, разлагается в ряд Фурье по характерам неприводимых представлений группы G.*

Доказательство. Условие (*) мы можем представить в виде

$$L_{g_0}^{-1} z(g) = R_{g_0} z(g),$$

где L_g и R_g — соответственно левое и правое регулярное представление группы G. Применяя это условие, получаем, что каждая матрица c^l, состоящая из коэффициентов Фурье функции $z(g)$, удовлетворяет тождеству

$$\tau^l(g_0)\, c^l = c^l \tau^l(g_0),$$

т. е. c^l перестановочна с операторами неприводимого представления τ^l; но тогда по лемме Шура эта матрица кратна единичной, и ряд Фурье для функции $z(g)$ принимает вид

$$z(g) = \sum_l \alpha_l \operatorname{sp} \tau^l(g)$$

(см. общий вид такого ряда в § 30). Теорема доказана.

Кроме того, из ортогональности матричных элементов получаем следствие:

$$\int \chi_\delta(g) \overline{\chi_{\delta'}(g)}\, dg = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta \neq \delta', \\ 1, & \text{если } \delta = \delta', \end{cases}$$

т. е. система Σ всех характеров χ_δ является *ортонормированной* системой.

Характеры χ_δ играют замечательную роль в теории представлений группы G. Действительно, как мы видели в § 22, со всяким представлением T_g группы G связано представление

$$T_x = \int x(g)\, T_g\, dg$$

групповой алгебры группы G, в частности алгебры $\mathfrak{H}$ (или $C(G)$). Если при этом $z \in \mathfrak{Z}$, то ясно, что оператор T_z перестановочен со всеми операторами представления T_x, а потому и со всеми операторами T_g. Следовательно, если T_g неприводимо, то оператор T_z кратен единичному, а если T_g вполне приводимо, то T_z диагонализуется в соответствующем базисе. В частности, если положим

$$P_\delta = n_\delta \int \overline{\chi_\delta(g)}\, T_g\, dg,$$

то операторы P_δ, как легко проверить (доказательство предоставляется читателю), являются *проекционными операторами*, каждый из которых проектирует все пространство V представления T_g на максимальное подпространство V_δ, представление в котором кратно δ. При этом, очевидно, $P_\delta P_{\delta'} = 0$ при $\delta \neq \delta'$ и

$$\sum_\delta P_\delta = I,$$

где I — единичный оператор в пространстве V. Следовательно, операторы P_δ осуществляют разложение представления T_g на представления, кратные неприводимым.

Несмотря на то, что практическое вычисление проекторов P_δ далеко не всегда является легким, мы получаем (в сочетании с принципом полной приводимости) универсальное решение проблемы спектрального анализа.

§ 34. Теория представлений конечных групп

Всякая конечная группа, очевидно, является компактной; следовательно, вся предыдущая теория применима к этому частному случаю. (Все доказательства, лежащие в основе этой теории, можно было бы повторить применительно к этому случаю, заменяя интегралы суммами.) Однако теория конечных групп и их представлений обладает и своими индивидуальными «арифметическими» особенностями.

Прежде всего, из глобальной теоремы непосредственно вытекает