групповой алгебры группы G, в частности алгебры $\mathfrak{H}$ (или $C(G)$). Если при этом $z \in \mathfrak{Z}$, то ясно, что оператор T_z перестановочен со всеми операторами представления T_x, а потому и со всеми операторами T_g. Следовательно, если T_g неприводимо, то оператор T_z кратен единичному, а если T_g вполне приводимо, то T_z диагонализуется в соответствующем базисе. В частности, если положим

$$P_\delta = n_\delta \int \overline{\chi_\delta(g)}\, T_g\, dg,$$

то операторы P_δ, как легко проверить (доказательство предоставляется читателю), являются *проекционными операторами*, каждый из которых проектирует все пространство V представления T_g на максимальное подпространство V_δ, представление в котором кратно δ. При этом, очевидно, $P_\delta P_{\delta'} = 0$ при $\delta \neq \delta'$ и

$$\sum_\delta P_\delta = I,$$

где I — единичный оператор в пространстве V. Следовательно, операторы P_δ осуществляют разложение представления T_g на представления, кратные неприводимым.

Несмотря на то, что практическое вычисление проекторов P_δ далеко не всегда является легким, мы получаем (в сочетании с принципом полной приводимости) универсальное решение проблемы спектрального анализа.

§ 34. Теория представлений конечных групп

Всякая конечная группа, очевидно, является компактной; следовательно, вся предыдущая теория применима к этому частному случаю. (Все доказательства, лежащие в основе этой теории, можно было бы повторить применительно к этому случаю, заменяя интегралы суммами.) Однако теория конечных групп и их представлений обладает и своими индивидуальными «арифметическими» особенностями.

Прежде всего, из глобальной теоремы непосредственно вытекает

Теорема 4 («1-я теорема Бернсайда»). *Если конечная группа G имеет порядок N, то имеет место равенство*

$$N = \sum_{i=1}^{m} n_i^2,$$

где n_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — размерности всех неприводимых (попарно неэквивалентных) представлений группы G.

Действительно, групповая алгебра $\mathfrak{H}$ представляет собою в этом случае линейное пространство размерности N, и разложение

$$\mathfrak{H} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{H}_i$$

дает искомое выражение для размерности, поскольку $\dim \mathfrak{H}_i = n_i^2$ ($\mathfrak{H}_i$ заменяет обозначение H^i из § 30). В действительности это разложение содержит значительно бо́льшую информацию об *изоморфизме* между групповой алгеброй $\mathfrak{H}$ и вполне приводимой «блок-алгеброй», состоящей из полных матричных блоков размерностей $n_i \times n_i$. Далее следует

Теорема 5 («2-я теорема Бернсайда»). *Если m — число всевозможных попарно неэквивалентных неприводимых представлений группы G, то*

$$m = \varkappa,$$

где $\varkappa$ — число всевозможных классов сопряженных элементов в группе G (G — конечная группа).

Для доказательства этой теоремы рассматривается центр групповой алгебры $\mathfrak{Z}$, который, как мы знаем, состоит из всевозможных функций, постоянных на классах сопряженных элементов, т. е. представляет собой в данном случае линейное пространство размерности $\varkappa$. Поскольку всякая такая функция разлагается по характерам χ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, то

$$\mathfrak{Z} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{Z}_i,$$

где одномерное пространство $\mathfrak{Z}_i$ натянуто на характер χ_i, и мы заключаем отсюда, что $m = \varkappa$. Теорема доказана.

В дальнейшем мы увидим, что все такие «арифметические» закономерности сохраняются в известном смысле и для произвольной компактной группы Ли, однако при этом они приобретают «аналитическое» содержание (вместо числа элементов группы или классов сопряженных элементов рассматриваются размерности соответствующих аналитических многообразий).

Пример. Симметрическая группа $S(n)$. Введенное обозначение мы будем использовать для группы всех подстановок, производимых над n «предметами». Условимся считать, что данные предметы размещены на n занумерованных местах и символ

$$s = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots i_n \\ j_1 & j_2 \ldots j_n \end{pmatrix}, \qquad i_k,\ j_k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

обозначает подстановку, которая состоит в перемещении предмета с места i_k на место j_k (движение вниз); из этого соглашения следует, что порядок расположения пар (i_k, j_k) в символе s для нас не имеет значения, а закон умножения в группе $S(n)$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \ldots j_n \\ k_1 & k_2 \ldots k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots i_n \\ j_1 & j_2 \ldots j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots i_n \\ k_1 & k_2 \ldots k_n \end{pmatrix}$$

напоминает закон умножения матриц (все индексы j_k, встречающиеся сверху и снизу, «сокращаются»). Известно, что всякая подстановка допускает разложение в произведение циклов

$$s = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{m_1})(k_{m_1+1},\ \ldots,\ k_{m_2}) \ldots (\ldots k_n),$$

где каждый цикл $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ определяется как частичная подстановка

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots i_{m-1} & i_m \\ i_2 & i_3 \ldots i_m & i_1 \end{pmatrix},$$

которая производится над предметами, стоящими на местах $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Всякий внутренний автоморфизм

$s \to s_0 s s_0^{-1}$ в группе $S(n)$ перемещает, очевидно, номера k_i, стоящие в отдельных циклах, но не меняет длину циклов и их число. Условившись считать, что длины циклов расположены в порядке убывания:

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_f, \quad m_1 + m_2 + \ldots + m_f = n$$

(f — число циклов), мы можем заключить, что всякий набор таких чисел однозначно нумерует произвольный класс сопряженных элементов $S_{m_1 m_2 \ldots m_f}$ в группе $S(n)$. Следовательно, число таких классов совпадает с числом всевозможных разбиений числа n в сумму невозрастающих натуральных чисел. Следовательно, согласно второй теореме Бернсайда, каждое неприводимое представление группы $S(n)$ может быть однозначно занумеровано указанным набором чисел $m_1, m_2, \ldots, m_f$. К более подробному рассмотрению таких представлений мы еще вернемся в § 55.

Заметим, что группа $S(n)$ допускает точное линейное представление с помощью преобразований $x \to sx$ в линейном пространстве размерности n, которые определяются по правилу

$$se_{i_k} = e_{j_k}, \qquad i_k, j_k = 1, 2, \ldots, n,$$

в произвольном фиксированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (здесь использовано одинаковое обозначение для подстановки

$$s = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

и соответствующего ей линейного преобразования s). Очевидно, при этом матрицы $s \in S(n)$ могут быть охарактеризованы как всевозможные матрицы, у которых в каждой строке и в каждом столбце содержится по единственному элементу, равному единице, а все остальные элементы равны нулю.

Теорема о точном линейном представлении для конечной группы доказывается тривиально, поскольку уже регулярное представление этой группы (левое или правое) является конечномерным и точным. Однако, анализируя

это представление, мы получаем в действительности более сильное утверждение:

Теорема 6. *Всякая конечная группа изоморфна некоторой подгруппе в симметрической группе* $S(n)$.

Действительно, записывая элементы $x \in \mathfrak{H}$ в виде линейных комбинаций

$$x = \sum_{g \in G} x(g)\, g,$$

мы рассматриваем точки $g \in G$ как базисные векторы в пространстве $\mathfrak{H}$. Следовательно, правые сдвиги

$$g \to gg_0$$

мы можем рассматривать как преобразование базиса в пространстве $\mathfrak{H}$ и продолжить их до линейного преобразования

$$x \to xg_0$$

во всем пространстве $\mathfrak{H}$. Поскольку точка $h = gg_0$ пробегает (при фиксированном g_0) все элементы группы G точно по одному разу, то полученное линейное преобразование является оператором подстановки. Теорема доказана.

Предлагается в качестве упражнений доказать самостоятельно следующие утверждения:

1. *Если все неприводимые представления конечной группы G одномерны, то группа G коммутативна**). (Указание: использовать вторую теорему Бернсайда.)

2. *Всякая коммутативная конечная группа изоморфна прямому произведению нескольких циклических групп* (циклическая группа порядка n определяется как группа корней n-й степени из единицы).

В частности, первое из этих утверждений замечательно в том отношении, что является примером информации, даваемой системой всех неприводимых представлений группы G относительно структуры самой группы G (идея двойственности, см. § 23).

---

*) Обратное также верно согласно следствию 1 из леммы Шура (§ 20).