§ 35. Универсальность группы U(n)

Подобно тому как симметрическая группа S(n) является, согласно теореме 6, «универсальной» в классе конечных групп, мы получаем (из глобальной теоремы), что унитарная группа U(n) обладает аналогичным свойством «универсальности» в классе компактных групп Ли:

Теорема 7. *Всякая компактная группа Ли изоморфна некоторой подгруппе в группе* U(n) (*при достаточно большом* n).

Действительно, всякая компактная группа Ли обладает точным линейным представлением и всякое ее линейное представление унитарно (свойства 1 и 3 из глобальной теоремы). Полученная теорема делает значительно более доступной задачу о классификации (с точностью до изоморфизма) всех компактных групп Ли; действительно, для этого достаточно перечислить все возможные замкнутые подгруппы в группе U(n). Однако такая задача еще является достаточно сложной. К вопросу о классификации мы перейдем только в гл. XVI. В настоящее время нас в первую очередь будет интересовать сама унитарная группа U(n), ее структура и структура всех ее неприводимых представлений. (Ограничение этой задачей естественно не только с точки зрения универсальности U(n), но и с точки зрения сравнительной простоты в работе с этой группой.)

В заключение этой главы перечислим без доказательства некоторые свойства компактных групп.

1° *Всякая компактная топологическая группа имеет лишь конечное число связных листов. В частности, всякая дискретная компактная группа конечна.*

Доказательство этого утверждения предоставляется читателю.

2° *Всякая коммутативная связная компактная группа Ли изоморфна группе движений n-мерного тора. В частности, всякая однопараметрическая замкнутая подгруппа в любой компактной группе Ли изоморфна группе вращений окружности.*

См. по этому поводу более общее утверждение на стр. 40.

Замечание. Существенно отметить, что *компактная группа Ли может содержать некомпактные подгруппы.* Типичным примером является *иррациональная обмотка тора* (§ 15). Такая подгруппа является бесконечной однопараметрической подгруппой $g(t)$, $-\infty < t < \infty$, в группе движений тора. Замыкание $g(t)$ совпадает со всей группой движений тора. Заметим, что последнее верно также, если вместо $g(t)$ рассматривать дискретную подгруппу элементов $g(n) = g^n$, где $g = g(1)$. Всякий элемент $g \in G$, степени которого образуют всюду плотное множество в G, мы условимся в дальнейшем называть *иррациональной образующей* группы G. Согласно сказанному выше всякая коммутативная связная компактная группа Ли обладает иррациональной образующей. Однопараметрическая подгруппа $g(t)$ в компактной группе G является замкнутой только в том случае, когда функция $g(t)$ периодична с некоторым периодом t_0; в этом случае группа $g(t)$ изоморфна окружности.

3° *Универсальная накрывающая всякой компактной группы Ли с дискретным центром снова является компактной группой Ли. Центр этой группы конечен.*

Это утверждение, принадлежащее Г. Вейлю [61], доказывается наиболее сложно (см. § 103). Как следствие из 3° можно получить, что существует лишь конечное число компактных связных групп Ли, локально изоморфных между собой.

К перечисленным свойствам ограниченности и конечности мы могли бы добавить еще замечательные свойства *конечности* и *дискретности*, содержащиеся в глобальной теореме. В ряде случаев из этих общих свойств удается получить практический критерий дискретности спектра некоторых линейных операторов, допускающих компактную группу симметрии, а также утверждение о конечной кратности их собственных значений. В частности, унитарная группа $U(n)$ как группа симметрии встречается в некоторых важных задачах теоретической физики.

Нашей ближайшей задачей является несколько более подробное изучение системы элементарных гармоник группы $U(n)$.

* * *

Исторически первым классом групп, для которых была построена теория представлений, явились конечные группы. Перенос этой теории на компактные группы Ли (в определенном смысле «наиболее близкие к конечным») был осуществлен в работе Ф. Петера и Г. Вейля [124]. Первоначальное доказательство «основной аппроксимационной теоремы», данное этими авторами, существенно использовало интегральный оператор свертки на компактной группе G. В том варианте доказательства, который дается в этой главе, мы используем такой оператор лишь однажды (§ 31), при доказательстве линейности группы G. Более подробное изложение теории конечных групп и их представлений можно найти в [3], [27], [31], [34], [41]. Общие вопросы изложены в [9], [10], [46], [61].