ГЛАВА V

# ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

С точки зрения глобальной теоремы представляет особый интерес детальное изучение структуры неприводимых представлений. Если речь идет о связной группе Ли, то для решения этой задачи и других задач теории представлений часто используется инфинитезимальный метод. Этот метод сводит рассмотрение группы Ли к рассмотрению соответствующей алгебры Ли.

Иллюстрацию метода мы изложим на примере SU(2) и SO(3). Напомним, что эти группы локально изоморфны, т. е. имеют одинаковую алгебру Ли. В дальнейшем мы увидим, что всякая компактная связная группа Ли содержит хотя бы одну подгруппу, изоморфную SU(2) или SO(3). Поэтому изучение этих групп интересно также с точки зрения общей теории.

## § 36. Дифференциал представления

Пусть $G$ — группа Ли и $g \to T_g$ — ее представление в векторном пространстве $V$, вещественном или комплексном. Как правило, мы будем рассматривать только конечномерные пространства. Все отступления от этого правила будут специально оговариваться.

Рассмотрим вначале тот случай, когда группа $G$ представляет собой аддитивную вещественную группу чисел $t$, $-\infty < t < \infty$. В этом случае речь идет о произвольной однопараметрической матричной группе $F(t)$, непрерывно зависящей от $t$:

$$F(t+s) = F(t)\,F(s), \quad F(0) = I,$$

где $I$ — единичная матрица в пространстве $V$. Пусть $\|F\|$ означает норму матрицы $F$ в пространстве $V$ и $\Omega$ означает окрестность единичной матрицы, выделяемую

условием $\|F - I\| < 1$. Изменяя, если нужно, нормировку параметра $t$, мы можем считать, не ограничивая общности, что $F(t) \in \Omega$ при $|t| \leqslant 1$. В частности, отсюда следует, что $F(1) = \exp A$ при некотором $A$. Покажем, что

$$F(t) = \exp tA$$

для всех значений $t$, $-\infty < t < \infty$. Действительно, это равенство должно иметь место для всех целых значений $t$. Далее, $F(1/2)$ совпадает с $\exp 1/2 A$, как единственный квадратный корень в области $\Omega$ из оператора $F(1) = \exp A$. Следовательно, наше равенство сохраняется также для всех полуцелых значений $t$. Рассуждая индуктивно, проверяем справедливость этого равенства для всех двоично-рациональных чисел $t$. Но тогда оно справедливо и на всей оси ввиду непрерывной зависимости $F(t)$ от $t$.

Полученный результат имеет принципиальное значение во всей теории представлений групп Ли. Прежде всего, мы видим, что функция $F(t)$ аналитична. Заметим, что оператор $A$ может быть определен как касательный вектор к кривой $F(t)$*). Этот оператор называется *производящим оператором* или *инфинитезимальным оператором* однопараметрической группы $F(t)$. Существенно, что значение инфинитезимального оператора полностью определяет всю группу $F(t)$. Это замечание лежит в основе излагаемого ниже общего «инфинитезимального метода».

Пусть теперь $G$ — произвольная группа Ли. Рассматривая в ней произвольную однопараметрическую подгруппу $g(t) = \exp tx$, мы положим

$$D(x) = \frac{d}{dt}(T_{\exp tx})_{t=0}.$$

Здесь $x$ — произвольный элемент в алгебре Ли $X$ группы $G$. Семейство операторов $D(x)$ мы называем *дифференциалом представления* $T_g$.

---

*) То есть $A = \frac{d}{dt}(F(t))_{t=0}$.

Теорема 1. *Пусть $G$ — группа Ли, $T_g$ — ее конечномерное представление и $D(x)$ — его дифференциал. Тогда $D(x)$ является представлением алгебры Ли $X$ группы $G$. Если $g = \exp x$, $x \in X$, то $T_g = \exp D(x)$. Функция $T_g$ является аналитической функцией на всей группе $G$.*

Доказательство. Пусть $x$, $y$ — произвольные элементы из алгебры $X$. Напомним, что вектор $z = \lambda x + \mu y$ является касательным вектором к кривой

$$a(t) = \exp t\lambda x \cdot \exp t\mu y$$

в единичной точке $e$. Образом этой кривой в представлении $T_g$ является $A(t) = \exp t\lambda D(x) \cdot \exp t\mu D(y)$. Касательным вектором к $A(t)$ в свою очередь служит $\lambda D(x) + \mu D(y)$. Следовательно, $D(z) = \lambda D(x) + \mu D(y)$. Аналогично рассматривается коммутатор $z = [x, y]$ и проверяется, что $D(z) = [D(x), D(y)]$. Следовательно, отображение $x \to D(x)$ является представлением алгебры $X$. Далее, если $x = t^i e_i$ по отношению к некоторому базису $e_i$ в алгебре $X$, то мы имеем *)

$$T_g = \exp D(x) = \exp t^i E_i,$$

где положено $E_i = D(e_i)$. Следовательно, функция $T_g$ аналитична в той окрестности точки $e$, где определены канонические координаты $g = \exp x$.

Применяя сдвиги в группе $G$ (левые или правые), заключаем, что функция $T_g$ аналитична также в окрестности каждой точки $g_0 \in G$. Теорема доказана.

Замечание 1. Подчеркнем, что в теореме 1 группа $G$ рассматривается как вещественная и имеется в виду вещественная аналитичность функции $T_g$. Если группа $G$ комплексна, то представление $T_g$ аналитично по вещественным параметрам в $G$. Однако если функция $T_g$ удовлетворяет условиям Коши — Римана по отношению к этим параметрам, то функция $T_g$ является комплексно-аналитической на $G$. В этом случае $T_g = \exp \lambda^i E_i$, где $\lambda^i$ — комплексные параметры в алгебре $X$.

---

*) Здесь и далее мы часто опускаем знак суммирования.

Замечание 2. Пусть $V$ бесконечномерно. Вектор $\xi$ называется *дифференцируемым*, если вектор-функция $T_g\xi$ дифференцируема на $G$. В частности, если $x(g)$ — дифференцируемая функция, равная нулю вне компактного множества на $G$, то вектор $\xi = \int x(g)\, T_g\xi_0\, dg$ является дифференцируемым для любого $\xi_0 \in V$ (проверьте). Пусть $V_0$ — множество всех таких векторов $\xi$. Если функционал $f$ равен нулю на $V_0$, то $f(T_g\xi_0) \equiv 0$ и, в частности, $f(\xi_0) = 0$ для любого $\xi_0 \in V$. Следовательно, $f = 0$. Как следует из теории линейных топологических пространств, в этом случае $V_0$ всюду плотно в $V$. Отсюда можем заключить, что дифференциал $D(x)$ допускает определение на всюду плотном множестве в $V$.

Мы предоставляем читателю проверить следующие свойства дифференциала:

1° *Если $\xi$ — инвариант представления $T_g$, то $\xi$ аннулируется всеми инфинитезимальными операторами $D(x)$.*

2° *Если $V_0$ — инвариантное подпространство относительно $T_g$, то $V_0$ инвариантно также относительно $D(x)$.*

3° *Если два представления $T'_g$, $T''_g$ эквивалентны, то их дифференциалы $D'(x)$, $D''(x)$ также эквивалентны.*

4° *Если представление $T_g$ является тензорным произведением представлений $T'_g$, $T''_g$, то на векторах вида $\xi \otimes \eta$ мы имеем*

$$D(x)(\xi \otimes \eta) = D'(x)\xi \otimes \eta + \xi \otimes D''(x)\eta.$$

5° *Если представление $\widehat{T}_g$ контрагредиентно представлению $T_g$, то мы имеем*

$$(D(x)\xi,\ \eta) + (\xi,\ \widehat{D}(x)\eta) = 0,$$

*где $D(x)$, $\widehat{D}(x)$ — дифференциалы $T_g$, $\widehat{T}_g$, а скобка $(\xi, \eta)$ означает билинейную форму, входящую в условие контрагредиентности.*

В частности, если $\widehat{T}_g = T'^{-1}_g$, то согласно 5° $\widehat{D}(x) = -D(x)'$. Такое представление в дальнейшем мы будем называть представлением алгебры $X$, *контрагредиентным* $D(x)$. Аналогично свойство 4° может быть использовано для определения тензорного произведения двух представлений алгебры $X$.

*Если $G$ — связная группа Ли, то согласно теореме 1 все эти утверждения допускают обращение.* Действительно, в этом случае функция $T_g$ порождается произведениями операторов вида $\exp D(x)$.

Далее, пусть $e_i$ — произвольно фиксированный базис в алгебре $X$ со структурными константами $c_{ij}^k$. Положим $E_i = D(e_i)$. Тогда согласно теореме 1 имеем

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k \qquad (*)$$

(сумма по $k$). Заметим, что между операторами $E_i$ могут существовать линейные соотношения.

Пример 1. Пусть $X$ — алгебра Ли группы $\mathrm{SU}(2)$. Согласно общим результатам § 10 алгебра Ли группы $\mathrm{su}(2)$ состоит из всех антиэрмитовых матриц $2 \times 2$. Матрицы

$$a_1 = \frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad a_2 = \frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix}, \quad a_3 = \frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

образуют базис в $\mathrm{su}(2)$. Несложное вычисление показывает, что элементы $a_1$, $a_2$, $a_3$ подчиняются следующим соотношениям коммутации:

$$[a_i, a_j] = \varepsilon_{ijk} a_k,$$

где $\varepsilon_{ijk}$ — полностью антисимметрический тензор, для которого $\varepsilon_{123} = 1$, и в правой части имеется в виду суммирование по $k$. Следовательно, если $A_i = D(a_i)$ для некоторого представления $\mathrm{su}(2)$, то мы по-прежнему имеем

$$[A_i, A_j] = \varepsilon_{ijk} A_k.$$

Пример 2. Пусть $G$ — группа всех треугольных матриц $3 \times 3$ с единицами на главной диагонали. Не ограничивая общности, будем говорить о верхних треугольных матрицах. Положим

$$p = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad q = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad r = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда $[p, q] = r$ и все остальные коммутаторы равняются нулю. Элементы $p$, $q$, $r$ образуют базис в алгебре Ли группы $G$. Если $P$, $Q$, $R$ — образы $p$, $q$, $r$ при некотором представлении, то мы по-прежнему имеем

$$[P, Q] = R.$$

Легко проверить, что в условиях примера 1 оператор $K = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ перестановочен со всеми операторами $A_1$, $A_2$, $A_3$. Этот оператор мы в дальнейшем используем при описании представления $D(x)$. Условимся называть его *оператором Казимира* представления $D(x)$.

**Упражнения**

1. Показать, что если матрицы $D(x)$ кососимметричны (или косоэрмитовы), то представление $D(x)$ вполне приводимо.

2. Пусть $F(g)x = gxg^{-1}$ для квадратных матриц $x$ и $g$. Показать, что всякий инфинитезимальный оператор группы $F(g)$ имеет вид $Ax = [a, x]$.

3. Положим $\mathscr{L}_i = x_j \dfrac{\partial}{\partial x_k} - x_k \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ с циклической перестановкой индексов $i$, $j$, $k = 1, 2, 3$. Показать, что линейные комбинации этих операторов образуют представление алгебры su(2).

## § 37. Неприводимые представления группы SU(2)

В этом параграфе мы займемся частным вопросом об описании неприводимых представлений алгебры su(2). Мы не знаем пока, всякому ли представлению алгебры Ли отвечает представление соответствующей группы Ли. Однако согласно результатам предыдущего параграфа, перечисляя неприводимые представления алгебры su(2), мы не пропустим, в частности, ни одного неприводимого представления группы SU(2).

Согласно построениям предыдущего параграфа наша задача сводится к рассмотрению всевозможных троек линейных операторов $A_1$, $A_2$, $A_3$, удовлетворяющих соотношениям коммутации

$$[A_i, A_j] = A_k$$

с циклической перестановкой индексов $i$, $j$, $k = 1, 2, 3$. (Коммутаторы, взятые в обратном порядке, отличаются знаком.) При этом данная тройка предполагается неприводимой. Вместо базисных элементов $A_1$, $A_2$, $A_3$ удобно рассматривать их комплексные линейные комбинации

$$E_- = i(A_1 - iA_2), \quad D_0 = iA_3, \quad E_+ = i(A_1 + iA_3),$$