Легко проверить, что в условиях примера 1 оператор $K = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ перестановочен со всеми операторами A_1, A_2, A_3. Этот оператор мы в дальнейшем используем при описании представления $D(x)$. Условимся называть его *оператором Казимира* представления $D(x)$.

Упражнения

1. Показать, что если матрицы $D(x)$ кососимметричны (или косоэрмитовы), то представление $D(x)$ вполне приводимо.

2. Пусть $F(g)x = gxg^{-1}$ для квадратных матриц x и g. Показать, что всякий инфинитезимальный оператор группы $F(g)$ имеет вид $Ax = [a, x]$.

3. Положим $\mathscr{L}_i = x_j \dfrac{\partial}{\partial x_k} - x_k \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ с циклической перестановкой индексов i, j, $k = 1, 2, 3$. Показать, что линейные комбинации этих операторов образуют представление алгебры su(2).

§ 37. Неприводимые представления группы SU(2)

В этом параграфе мы займемся частным вопросом об описании неприводимых представлений алгебры su(2). Мы не знаем пока, всякому ли представлению алгебры Ли отвечает представление соответствующей группы Ли. Однако согласно результатам предыдущего параграфа, перечисляя неприводимые представления алгебры su(2), мы не пропустим, в частности, ни одного неприводимого представления группы SU(2).

Согласно построениям предыдущего параграфа наша задача сводится к рассмотрению всевозможных троек линейных операторов A_1, A_2, A_3, удовлетворяющих соотношениям коммутации

$$[A_i, A_j] = A_k$$

с циклической перестановкой индексов i, j, $k = 1, 2, 3$. (Коммутаторы, взятые в обратном порядке, отличаются знаком.) При этом данная тройка предполагается неприводимой. Вместо базисных элементов A_1, A_2, A_3 удобно рассматривать их комплексные линейные комбинации

$$E_- = i(A_1 - iA_2), \quad D_0 = iA_3, \quad E_+ = i(A_1 + iA_3),$$

которые удовлетворяют следующим соотношениям коммутации:

$$[E_0,\ E_+] = E_+,\quad [E_0,\ E_-] = -E_-,\quad [E_+,\ E_-] = 2E_0.$$

Преимущество этих соотношений коммутации состоит, формально говоря, в том, что операторы E_+, E_- оказываются «собственными векторами» относительно преобразования E_0: $A \to [E_0, A]$. Следствием этого условия является

Лемма 1. *Если вектор ξ является собственным вектором в пространстве V относительно E_0 с собственным значением λ, то векторы*

$$E_-\xi = \xi_-,\quad E_+\xi = \xi_+$$

также являются собственными относительно E_0 с собственными значениями соответственно $\lambda - 1$, $\lambda + 1$.

Доказательство. Заметим, что $E_0E_+ = E_+E_0 + [E_0, E_+] = E_+(E_0 + 1)$. Отсюда имеем

$$E_0\xi_+ = E_0E_+\xi = E_+(E_0 + 1)\xi = (\lambda + 1)\xi_+.$$

Аналогично рассматривается вектор ξ_-. Лемма доказана.

Поскольку пространство V предполагается конечномерным, то существует максимальное собственное значение оператора E_0, которое обозначим l. Пусть ξ_0 — соответствующий собственный вектор, тогда «повышающий» оператор E_+ обращает этот вектор в нуль. В результате имеем

$$E_+\xi_0 = 0,\quad E_0\xi_0 = l\xi_0.$$

Применяя к вектору ξ_0 «понижающий» оператор E_- и его всевозможные степени, получаем цепочку элементов $\xi_k = E_-^k\xi_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, каждый из которых является собственным относительно E_0 с собственным значением $l - k$. Ввиду конечности числа собственных значений эта цепочка должна оборваться:

$$E_-^{m+1}\xi_0 = 0.$$

Пусть V_0 — линейная оболочка полученных векторов $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$. Покажем, что V_0 является циклической оболочкой вектора ξ_0 относительно алгебры $\mathscr{P}$ всех полиномов от операторов E_-, E_0, E_+. Действительно, ис-

пользуя соотношения коммутации, мы можем всякий одночлен от этих операторов привести к виду

$$E_-^p E_0^q E_+^r$$

с точностью до слагаемых, имеющих меньшую общую степень. Этот одночлен может быть отличен от нуля на векторе ξ_0 только при условии $r = 0$. Операция E_0 сводится к растяжению вектора ξ_0, операция E_-^p переводит этот вектор в вектор, коллинеарный ξ_p. Следовательно, $V_0 = \mathscr{P}\xi_0$. Но тогда $V_0 = V$ ввиду неприводимости V. Поскольку векторы ξ_k имеют различные собственные значения, то они линейно независимы. Следовательно, они образуют базис в пространстве V.

Нам уже известны правила действия операторов E_-, E_0 в выбранном базисе. Остается определить действие оператора E_+. Для этого удобно использовать оператор

$$\Delta = \frac{1}{2}(E_-E_+ + E_+E_-) + E_0^2,$$

который, как легко проверить, отличается лишь множителем —1 от оператора Казимира K, введенного в конце предыдущего параграфа. Отсюда следует, что Δ перестановочен со всеми операторами E_-, E_0, E_+. Мы попрежнему будем называть оператор Δ *оператором Казимира*. Заметим, что

$$\Delta = E_-E_+ + E_0(E_0 + 1) = E_+E_- + E_0(E_0 - 1)$$

в силу соотношений коммутации между операторами E_-, E_0, E_+. Согласно первому из этих выражений мы имеем

$$\Delta\xi_0 = l(l+1)\xi_0.$$

Поскольку Δ коммутирует с E_-, мы, очевидно, имеем также $\Delta\xi_k = l(l+1)\xi_k$ для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Следовательно, Δ является скалярным оператором на всем пространстве V. (Это следует также из леммы Шура.) Согласно второму из указанных выражений мы имеем

$$E_+E_- = \Delta - E_0(E_0 - 1),$$

и это тождество дает нам способ для вычисления оператора E_+. Действительно, применяя обе части этого тождества к вектору ξ_{k-1}, находим

$$E_+\xi_k = (\Delta - E_0(E_0 - 1))\,\xi_{k-1}.$$

Отсюда, заменяя каждый оператор в правой части соответствующим собственным значением, находим после несложных вычислений, что имеет место

Лемма 2. *Оператор E_+ в базисе $\xi_k = E_-^k\xi_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, выражается следующей формулой:*

$$E_+\xi_k = (2l - k + 1)\,k\xi_{k-1}.$$

Между числами l и m существует соотношение $m = 2l$, т. е. l является целым или полуцелым. Число $-l$ является минимальным собственным значением оператора E_0.

Для доказательства последнего утверждения достаточно рассмотреть вектор $\eta = \xi_m$, на котором E_- обращается в нуль. Если вектор η имеет собственное значение l' относительно E_0, то, согласно указанным выше формулам для оператора Δ, мы имеем

$$l(l+1) = l'(l'-1).$$

Подставляя значение $l' = l - m$, мы находим после несложных вычислений (учитывая, что $m \geqslant 0$) равенство $m = 2l$. Отсюда следует также равенство $l' = -l$.

Следствие. *Спектр оператора E_0 симметричен относительно начала координат. Пространство V имеет размерность $2l + 1$.*

Для окончательной записи полученного результата удобно вместо нумерации $k = m, m-1, \ldots, 0$ использовать нумерацию $\mu = -l, -l+1, \ldots, l$. Для этого мы полагаем $\mu = l + k$ и вводим обозначение x_μ для базисного вектора с собственным значением μ.

Теорема 2. *Всякое неприводимое представление алгебры $\mathrm{su}(2)$ в пространстве конечной размерности определяется однозначно, с точностью до эквивалентности, числом l, полуцелым или целым. Существует базис x_μ, $\mu = -l, -l+1, \ldots, l$, относительно которого операторы E_-, E_0, E_+ задаются формулами*

$$E_0 x_\mu = \mu x_\mu,$$

$$E_- x_\mu = (l + \mu)\,x_{-1}, \quad E_+ x_\mu = (l - \mu)\,x_{\mu\mu+1}.$$

Здесь операторы E_-, E_0, E_+ являются указанными выше комплексными линейными комбинациями базисных операторов A_1, A_2, A_3. В частности, $E_0 = iA_3$, и, следовательно, в данном базисе оператор A_3 диагонализуется. Пространство представления имеет размерность $2l+1$. Каждый из операторов A_1, A_2, A_3 диагонализуется в некотором базисе.

Доказательство. Формула $E_0 x_\mu = \mu x_\mu$ следует из определения вектора x_μ. Формула $E_- x_\mu = (l+\mu) x_{\mu-1}$ равносильна нормировке базисного вектора x_μ; при этом автоматически учитывается условие $E_- x_{-l} = 0$. Формула для E_+ легко вычисляется отсюда с помощью леммы 2.

Не представляет труда проверить, что полученное представление действительно неприводимо. В самом деле, если $x \neq 0$ — произвольный вектор в пространстве представления, то, применяя к нему достаточно высокую степень повышающего оператора E_+, получаем, с точностью до множителя, базисный вектор x_l. Применяя теперь понижающий оператор E_-, получаем все остальные базисные векторы x_μ, $\mu = -l, -l+1, \ldots, l$. Следовательно, циклическая оболочка $\mathscr{P}x$ относительно алгебры $\mathscr{P}$, порожденной E_-, E_0, E_+, совпадает со всем пространством V. Но это и означает, согласно правилу цикличности, неприводимость V.

Наконец, последнее замечание относительно диагонализации операторов A_1, A_2, A_3 вытекает непосредственно из симметричности коммутационных соотношений по отношению к циклической перестановке таких операторов. Теорема доказана.

Каждое собственное значение оператора E_0 принято называть *весом* данного представления. Максимальный вес l называется обычно *старшим весом*, а соответствующий базисный вектор x_l — *старшим вектором*. (Аналогично вводятся понятия *младшего веса* и *младшего вектора* представления — заменой l на $-l$.) Неприводимое представление со старшим весом l мы условимся обозначать символом $d(l)$.

Выясним теперь вопрос о возможности перехода к группе SU(2). Поскольку каждое неприводимое представление этой группы реализуется в классе тензоров, то естественно попробовать для каждого старшего веса l

отыскать соответствующее представление в классе тензоров. Исходя из нумерации $m = 2l$, естественно исследовать в первую очередь симметрические тензоры. Действительно, симметрические тензоры ранга m над двумерным пространством имеют размерность $m + 1 = 2l + 1$.

Вместо симметрических тензоров $t^{i_1 i_2 \cdots i_m}$ удобно рассматривать соответствующие полиномы $f(x) = t^{i_1 i_2 \cdots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$, где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_m$ пробегают значения 1, 2. Вводя обозначения x, y вместо x_1, x_2 и располагая эти координаты в виде строки, приходим к рассмотрению следующих преобразований:

$$T_g f(x, y) = f(\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y). \qquad (*)$$

Действительно, указанная операция под знаком полинома равносильна умножению строки (x, y) справа на матрицу

$$g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}, \qquad g \in \mathrm{SU}(2).$$

При этом $f(x, y)$ — произвольный однородный полином степени m, т. е. линейная комбинация одночленов $x^m, x^{m-1}y, \ldots, y^m$. Используя свойство однородности, мы можем положить $f(x, y) = y^m f(z)$, где положено $z = x/y$ и $f(z) = f(z, 1)$. После несложного пересчета получаем следующую формулу в классе функций $f(z)$:

$$T_g f(z) = (\beta z + \delta)^m f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right). \qquad (**)$$

Здесь мы по-прежнему используем символ T_g для нового закона преобразований в классе полиномов $f(z)$. Очевидно, $f(z)$ является полиномом степени не выше m, т. е. линейной комбинацией одночленов $1, z, z^2, \ldots, z^m$. Следовательно, пространство представления имеет размерность $m + 1$.

Теорема 3. *Всякое неприводимое представление группы* $\mathrm{SU}(2)$ *определяется однозначно с точностью до эквивалентности числом* l, *полуцелым или целым. Это представление может быть реализовано формулой* (*)

в классе однородных полиномов степени $m = 2l$ либо формулой (**) в классе полиномов $f(z)$ степени $\leqslant m$. Соответственно данное представление реализуется также в классе ковариантных симметрических тензоров ранга m.

Доказательство. Найдем дифференциал представления (*). Строго говоря, мы должны построить в SU(2) систему трех однопараметрических подгрупп с касательными векторами a_1, a_2, a_3 и вычислить затем соответствующие инфинитезимальные операторы A_1, A_2, A_3 в пространстве представления (*). Однако удобнее вместо этого непосредственно отыскивать операторы E_-, E_0, E_+. Для этого достаточно заметить, что формула (*) задает представление не только группы SU(2), но также группы SL(2), которая является ее комплексной оболочкой *). Очевидно, комплексные линейные комбинации E_-, E_0, E_+ являются инфинитезимальными операторами по отношению к SL(2). При этом существенно отметить, что формулы (*) задаются комплексно-аналитическими функциями от параметров SL(2). Следовательно, при вычислении инфинитезимальных операторов мы можем рассматривать однопараметрические подгруппы с *комплексным* аддитивным параметром. Положим

$$g_-(t) = \begin{Vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad g_0(t) = \begin{Vmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{Vmatrix}, \quad g_+(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{Vmatrix},$$

где t — аддитивный параметр (комплексный или вещественный). Тогда мы получаем систему трех однопараметрических подгрупп с касательными векторами

$$e_- = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad e_0 = \begin{Vmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{Vmatrix}, \quad e_+ = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти элементы удовлетворяют коммутационным соотношениям $[e_0, e_+] = e_+$, $[e_0, e_-] = -e_-$, $[e_+, e_-] = 2e_0$. Нетрудно также видеть, что $e_0 = ia_3$, $e_\pm = i(a_1 \pm ia_2)$, где a_1, a_2, a_3 — касательные векторы для SU(2). Переходя к операторам представления, положим $F_\pm(t) = T_{g_\pm(t)}$, $F_0(t) = T_{g_0(t)}$.

---

*) Определение комплексной оболочки см. в § 13.

В результате имеем

$$F_-(t)f(x, y) = f(x, tx+y), \qquad F_+(t)f(x, y) = f(x+ty, y),$$
$$F_0(t)f(x, y) = f(e^{-t/2}x, e^{t/2}y).$$

Производя дифференцирование по t и полагая $t=0$, получаем следующую систему инфинитезимальных операторов E_-, E_0, E_+:

$$E_- = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad E_0 = \frac{1}{2}\left(y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad E_+ = y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Вычислим закон преобразования для элементов базиса $x_\mu = x^{l-\mu}y^{l+\mu}$, $\mu = -l, -l+1, \ldots, l$. Имеем

$$E_-x_\mu = (l+\mu)x_{\mu-1}, \quad E_+x_\mu = (l-\mu)x_{\mu+1},$$
$$E_0x_\mu = \mu x_\mu.$$

Следовательно, мы получаем те же основные формулы, что и в теореме 2. Это означает, что для каждого представления $d(l)$ алгебры su(2) найдено соответствующее представление группы SU(2) (имеющее $d(l)$ своим дифференциалом). Это означает также, что группа SU(2) не имеет более (с точностью до эквивалентности) никаких иных неприводимых представлений. Действительно, группа SU(2) является связной и всякое ее представление определяется, с точностью до эквивалентности, своим дифференциалом.

Теорема доказана.

Неприводимое представление группы SU(2) со старшим весом $l = m/2$ мы условимся обозначать символом $\boldsymbol{d}^m$. В результате получена полная классификация неприводимых представлений этой группы.

Указанное выше построение является классическим образцом применения инфинитезимального метода. Отметим несколько добавочных возможностей, заложенных в этом построении.

Замечание 1. Пусть пространство V конечномерно, но не обязательно неприводимо. Применяя указанный процесс построения, мы можем начать с рассмотрения старшего вектора ξ ($E_+\xi = 0, E_0\xi = l\xi$) и построить шаг за шагом цепочки вида $E_-^k\xi$, $E_-^k\xi'$, ..., отвечающие старшим весам $l \geqslant l' \geqslant \ldots$ Нетрудно видеть, что та-

ким путем удается построить базис в пространстве представления. Но это означает, что V вполне приводимо. Таким путем мы получаем *алгебраическое доказательство принципа полной приводимости* (для SU(2)).

Замечание 2. Если бы мы с самого начала использовали соответствие между представлениями su(2) и SU(2), то доказательство теоремы 2 можно было бы несколько упростить. Действительно, рассмотрим в SU(2) подгруппу диагональных матриц

$$\gamma = \begin{Vmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{Vmatrix}.$$

Соответствующее семейство операторов T_γ унитарно и коммутативно; следовательно, существует базис, в котором операторы T_γ диагонализуются. Но это приводит сразу к заключению о диагонализации оператора E_0, который является инфинитезимальным оператором однопараметрической группы T_γ.

Далее, всякое собственное значение оператора T_γ имеет вид $e^{in\varphi}$, где n — целое число. Сравнивая с определением оператора E_0, данным при доказательстве теоремы 3, заключаем, что собственные значения E_0 могут быть только целыми или полуцелыми. Наконец, полагая

$$s = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

замечаем, что преобразование $s\gamma s^{-1} = \gamma^{-1}$ сводится к перестановке собственных значений матрицы γ, т. е. к замене φ на $-\varphi$. В то же время $T_s T_\gamma T_{s^{-1}} = T_\gamma^{-1}$, откуда легко заключить, что оператор T_s переводит каждый собственный вектор T_γ с собственным значением $e^{in\varphi}$ в новый собственный вектор с собственным значением $e^{-in\varphi}$. Отсюда следует *симметрия* в классе собственных значений оператора E_0.

Замечание 3. Нетрудно видеть, что $sgs^{-1} = g'^{-1}$ для каждого $g \in SL(2)$. Отсюда следует, что *всякое представление* SL(2) *эквивалентно своему контрагредиентному*. (Отсюда ясно также, почему все неприводимые представления SU(2) удалось реализовать в классе только *ковариантных* тензоров.) Элемент s мы будем иногда называть *элементом Вейля*.

Замечание 4. Отбросим условие конечномерности, но потребуем взамен выполнения следующих двух условий: 1) существования старшего вектора $\xi_0 : E_+\xi_0 = 0$, $E_0\xi_0 = l\xi_0$; 2) цикличности этого вектора по отношению к алгебре $\mathscr{P}$, порожденной операторами E, E_0, E_+. Повторяя почти без изменения предыдущие

построения, получаем существование весового базиса $\xi_k = E_-^k \xi_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, по отношению к которому операторы представления имеют следующий вид:

$$E_-\xi_k = \xi_{k+1}, \quad E_0\xi_k = (l-k)\,\xi_k,$$
$$E_+\xi_k = (2l-k+1)\,k\xi_{k-1}.$$

Последняя формула аналогична указанной в лемме 2. Однако старший вес l может быть теперь *произвольным комплексным*. Полученное представление неприводимо всегда, за исключением случая $2l = m$ при некотором целом неотрицательном m. Действительно, в этом случае мы имеем

$$E_+\xi_{m+1} = 0.$$

Следовательно, вектор ξ_{m+1} снова является старшим по отношению к E_+. Его циклическая оболочка V_0 является инвариантным подпространством в пространстве V. Нетрудно видеть, что V_0 неприводимо. В то же время фактор-пространство V/V_0 конечномерно и в нем действует уже известное нам конечномерное представление $d(l)$.

В результате мы можем заключить, что *алгебра* su(2) *допускает бесконечномерные неприводимые представления* (*которые, однако, не могут быть продолжены до представлений группы* SU(2)).

Замечание 5. Неприводимое представление $\boldsymbol{d}^m$ группы SU(2) является симметризованной частью тензорного произведения $\boldsymbol{d}^{\otimes m}$, где $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^1$ — двумерное представление (исходное представление SU(2)) и $\otimes m$ означает m-ю тензорную степень. В представлении $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^1$ роль базисных векторов играют линейные функции x, y, введенные выше. Если рассматривать x, y как некоммутативные символы, то базисный вектор x_μ, построенный при доказательстве теоремы 3, возникает при симметризации одночленов вида $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m}$, $x_i = x, y$, где x встречается $l-\mu$ раз и y встречается $l+\mu$ раз. Введем в пространство тензоров ранга m обычное скалярное произведение, при котором все одночлены $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m}$ взаимно ортогональны и имеют единичную норму. Отсюда следует, что

$$\|x_\mu\|^2 = c_0(l-\mu)!\,(l+\mu)!,$$

где c_0 — константа, не зависящая от μ. Действительно, $(l-\mu)!\,(l+\mu)!$ есть число одночленов указанного вида и в то же время скалярный квадрат суммы таких одночленов. В силу вышесказанного вектор x_μ отличается

лишь множителем $c_0 = 1/m!$ от этой суммы. Следовательно, если положим

$$e_\mu = \frac{x_\mu}{\sqrt{(l-\mu)!\,(l+\mu)!}},$$

то мы получим ортонормированный базис в пространстве представления. Легко проверить, что

$$E_- e_\mu = \sqrt{(l+\mu)(l-\mu+1)}\; e_{\mu-1},$$
$$E_+ e_\mu = \sqrt{(l-\mu)(l+\mu-1)}\; e_{\mu+1},$$
$$E_0 e_\mu = \mu e_\mu.$$

В реализации (**) следует заменить x_μ на одночлен $z^{l-\mu}$, $\mu = -l, -l+1, \ldots, l$. Операторы группы SU(2) являются, очевидно, *унитарными* относительно выбранного базиса. Операторы A_1, A_2, A_3 антиэрмитовы, операторы E_-, E_+ взаимно сопряжены, и оператор E_0 самосопряжен.

На примере группы SU(2) в значительной степени намечаются черты более общей теории *).

§ 38. Матричные элементы группы SU(2)

Для дальнейшего изучения неприводимых представлений группы SU(2) нам будет удобно записывать эти представления с помощью дробно-линейной подстановки:

$$T_g f(z) = (\beta z + \delta)^m f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right).$$

Здесь z — произвольное комплексное число, и подпространство $\mathfrak{R}_l$, в котором действует представление $\boldsymbol{d}^m$, $l = m/2$, натянуто на базисные векторы

$$z_\mu = z^{l-\mu}, \qquad \mu = -l,\ -l+1,\ \ldots,\ l.$$

Напомним, что l — полуцелое или целое число, т. е. $m = 2l$ является целым. При помощи указанной формулы нетрудно вычислить матричные элементы представления $\boldsymbol{d}^m$. Действительно, матричные элементы $\tau^l_{\mu\nu}(g)$

*) Главы VII, X, XVI, XVII.