

лишь множителем $c_0 = 1/m!$ от этой суммы. Следовательно, если положим

$$e_\mu = \frac{x_\mu}{\sqrt{(l-\mu)!(l+\mu)!}},$$

то мы получим ортонормированный базис в пространстве представления. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} E_- e_\mu &= \sqrt{(l+\mu)(l-\mu+1)} e_{\mu-1}, \\ E_+ e_\mu &= \sqrt{(l-\mu)(l+\mu-1)} e_{\mu+1}, \\ E_0 e_\mu &= \mu e_\mu. \end{aligned}$$

В реализации (**) следует заменить x_μ на одночлен $z^{l-\mu}$, $\mu = -l, -l+1, \dots, l$. Операторы группы SU(2) являются, очевидно, *унитарными* относительно выбранного базиса. Операторы A_1, A_2, A_3 антиэрмитовы, операторы E_-, E_+ взаимно сопряжены, и оператор E_0 самосопряжен.

На примере группы SU(2) в значительной степени намечаются черты более общей теории *).

§ 38. Матричные элементы группы SU(2)

Для дальнейшего изучения неприводимых представлений группы SU(2) нам будет удобно записывать эти представления с помощью дробно-линейной подстановки:

$$T_g f(z) = (\beta z + \delta)^m f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right).$$

Здесь z — произвольное комплексное число, и подпространство \mathfrak{A}_l , в котором действует представление \mathbf{d}^m , $l = m/2$, натянуто на базисные векторы

$$z_\mu = z^{l-\mu}, \quad \mu = -l, -l+1, \dots, l.$$

Напомним, что l — полуцелое или целое число, т. е. $m = 2l$ является целым. При помощи указанной формулы нетрудно вычислить матричные элементы представления \mathbf{d}^m . Действительно, матричные элементы $\tau_{\mu\nu}^l(g)$

*) Главы VII, X, XVI, XVII.

определяются следующей формулой:

$$T_g z_v = \sum_{\mu=-l}^l \tau_{\mu v}^l(g) z_\mu.$$

Следовательно, $\tau_{\mu v}^l(g)$ есть коэффициент полинома $T_g z_v$ при степени $z_\mu = z^{l-\mu}$. Указанный коэффициент вычисляется с помощью обычной формулы Тейлора:

$$\tau_{\mu v}^l(g) = \frac{1}{(l-\mu)!} \frac{d^{l-\mu}}{dz^{l-\mu}} [(\beta z + \delta)^{l+v} (\alpha z + \gamma)^{l-v}]_{z=0}.$$

Действительно, выражение в квадратной скобке есть развернутая запись для полинома $T_g z_v$. Полагая $u = \beta z + \delta$, $v = \alpha z + \gamma$, замечаем, что $\alpha u - \beta v = 1$. Следовательно, если вместо переменной z ввести переменную $t = \alpha u$, то $\beta v = t - 1$, и после подстановок $u = \frac{1}{\alpha} t$, $v = -\frac{1}{\beta} (1 - t)$, $\frac{d}{dz} = \alpha \beta \frac{d}{dt}$ получаем следующий результат:

$$\tau_{\mu v}^l(g) = \frac{(-1)^{l-v}}{(l-\mu)!} \alpha^{-\mu-v} \beta^{-\mu+v} \frac{d^{l-\mu}}{dt^{l-\mu}} [t^{l+v} (1-t)^{l-v}]_{t=\alpha\delta}.$$

Действительно, $t = \alpha\delta$ при $z = 0$. Введем обозначение

$$P_{\mu v}^l(t) = \frac{d^{l-\mu}}{dt^{l-\mu}} [t^{l+v} (1-t)^{l-v}].$$

Полиномы $P_{\mu v}^l(t)$ отличаются лишь несущественными множителями от хорошо известных полиномов Якоби. В результате получаем

$$\tau_{\mu v}^l(g) = \frac{(-1)^{l-v}}{(l-\mu)!} \alpha^{-\mu-v} \beta^{-\mu+v} P_{\mu v}^l(\alpha\delta).$$

До сих пор мы нигде не использовали унитарность матрицы g . Следовательно, полученный результат справедлив для $SL(2)$ (и даже для $GL(2)$). Предполагая теперь унитарность ($g^* g = e$) и унимодулярность ($\det g = 1$), получаем следующую систему соотношений на параметры матрицы g :

$$\delta = \bar{\alpha}, \quad \gamma = -\bar{\beta}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Следовательно, $g \in \text{SU}(2)$ вполне определяется элементами α, β , расположенными в первой строке, для которых $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1^*$). Мы положим $|\alpha|^2 = t$, $\arg \alpha = -\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$, $\arg \beta = \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$. В результате получаем в $\text{SU}(2)$ систему независимых параметров t, φ, ψ , для которых $0 \leq t \leq 1$, $-2\pi \leq \psi < 2\pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi^{**}$). В этих параметрах имеем

$$\tau_{\mu\nu}^l(g) = \frac{(-1)^{l-v}}{(l-\mu)!} e^{i(\mu\varphi+v\psi)} t^{-\frac{1}{2}(\mu+v)} (1-t)^{-\frac{1}{2}(\mu-v)} P_{\mu\nu}^l(t).$$

Мы теперь имеем право рассматривать t под знаком полинома $P_{\mu\nu}^l(t)$ как независимый параметр в нашей группе ($t = |\alpha|^2 = \alpha\delta$). В результате получена следующая

Теорема 4. *Матричные элементы $\tau_{\mu\nu}^l(g)$ выражаются указанной выше формулой через полиномы Якоби. Эти элементы нормированы условием $\tau_{\mu\nu}^l(e) = \delta_{\nu\mu}$.*

Полагая

$$\sigma_{\mu\nu}^l(g) = \sqrt{\frac{(l+\mu)!}{(l+\nu)!} \frac{(l-\mu)!}{(l-\nu)!}} \tau_{\mu\nu}^l(g),$$

получаем систему элементов, которые имеют одинаковую норму в $L^2(G)$ при фиксированном старшем весе l :

$$\int |\sigma_{\mu\nu}^l(g)|^2 dg = \frac{1}{2l+1}.$$

Последнее утверждение вытекает из замечания 5 в конце предыдущего параграфа (переход к унитарному базису в пространстве представления) и выражения для нормы $n^{-\frac{1}{2}}$, $n = 2l+1$, даваемого глобальной теоремой.

Замечание 1. Мера Хаара в условиях теоремы 4 нормирована так, что мера всей группы $\text{SU}(2)$ равна единице. В параметрах t, φ, ψ эта мера, как легко

*) Отсюда следует, что группа $\text{SU}(2)$ как многообразие изоморфна сфере S^3 в четырехмерном евклидовом пространстве.

**) Нетрудно проверить, что указанное ограничение на параметры φ, ψ равносильно условию $-\pi \leq \arg \alpha, \arg \beta < \pi$. При $t = 0$ и $t = 1$ параметры φ, ψ определяются неоднозначно.

проверить, имеет следующий вид:

$$dg = \frac{1}{8\pi^2} dt d\varphi d\psi.$$

Замечание 2. Общая формула для $\tau_{\mu\nu}^l(g)$ хороша своей общностью и компактностью записи. Однако при малых $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ для нахождения матричных элементов несравненно проще непосредственно вычислять разложение полинома $T_g z_v$ по базисным элементам $z_\mu = z^{l-\mu}$. Например, при $l = 1$ таким путем легко получаем

$$\tau^1(g) = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\gamma \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{vmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы являются коэффициентами при $z^2, z, 1$ в разложении по степеням z полиномов $(\alpha z + \gamma)^2, (\alpha z + \gamma)(\beta z + \delta), (\beta z + \delta)^2$. Аналогично при $l = \frac{3}{2}$ получаем

$$\tau^{\frac{3}{2}}(g) = \begin{vmatrix} \alpha^3 & \alpha^2\beta & \alpha\beta^2 & \beta^3 \\ 3\alpha^2\gamma & \alpha^2\delta + 2\alpha\beta\gamma & 2\alpha\beta\delta + \beta^2\gamma & 3\beta^2\delta \\ 3\alpha\gamma^2 & 2\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2 & \alpha\delta^2 + 2\beta\gamma\delta & 3\beta\delta^2 \\ \gamma^3 & \gamma^2\delta & \gamma\delta^2 & \delta^3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда легко получить выражения матричных элементов через параметры t, φ, ψ . Элементы $\sigma_{\mu\nu}^l(g)$ получаются перенормировкой.

Замечание 3. Рассматривая матрицу $s_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ и вычисляя T_{s_0} на базисных элементах, легко находим

$$\tau_{\mu\nu}^l(s_0) = \sigma_{\mu\nu}^l(s_0) = \delta_{\mu, -\nu},$$

где $\delta_{\mu\nu}$ означает символ Кронекера. Отсюда вытекают соотношения симметрии, которые имеют одинаковый вид для матриц $\tau^l(g), \sigma^l(g)$. В частности, если условимся записывать $\tau^l(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ вместо $\tau^l(g)$, то мы найдем

$$\tau_{\mu\nu}^l(\gamma, \delta, \alpha, \beta) = \tau_{-\mu, -\nu}^l(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

$$\tau_{\mu\nu}^l(\beta, \alpha, \delta, \gamma) = \tau_{\mu, -\nu}^l(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Указанные равенства выражают в параметрах $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ следующие соотношения: $\tau^l(s_0 g) = \tau^l(s_0) \tau^l(g)$, $\tau^l(gs_0) = \tau^l(g) \tau^l(s_0)$. Аналогично, если вместо матрицы s_0 рассмотрим матрицу $\sigma = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, то получим

$$\tau_{\mu\nu}^l(\alpha, -\beta, \gamma, -\delta) = (-1)^{\mu+\nu} \tau_{\mu\nu}^l(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Комбинируя полученные соотношения, можно выписать еще другие свойства симметрии для матричных элементов $\tau_{\mu\nu}^l(g)$. Кроме того, представляет интерес рассмотрение элемента Вейля $s = \sigma s_0$, для которого, как мы знаем, $sgs^{-1} = g'^{-1}$. Вычисляя матрицу $\tau^l(g'^{-1})$, с одной стороны, как $\tau^l(g)^{-1}$ и, с другой стороны, как $\tau^l(s)\tau^l(g)\tau^l(s)^{-1}$, находим

$$\tau_{\mu\nu}^l(\delta, -\beta, -\gamma, \alpha) = (-1)^{\mu+\nu} \tau_{-\nu, -\mu}^l(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

До сих пор мы не учитывали *унитарности* матрицы g . Если g унитарна, то $g'^{-1} = \bar{g}$, где черта означает комплексное сопряжение. Следовательно,

$$\tau_{\mu\nu}^l(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}) = (-1)^{\mu+\nu} \tau_{-\nu, -\mu}^l(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Если заметить, что $\tau_{\mu\nu}^l(\bar{g}) = \overline{\tau_{\mu\nu}^l(g)}$ (это очевидно из рассмотрения тензоров), то последнее равенство можно записать также в следующей форме:

$$\tau_{\mu\nu}^l(g) = (-1)^{\mu+\nu} \overline{\tau_{-\nu, -\mu}^l(g)}.$$

Отсюда для $g \in \text{SU}(2)$ получаем еще одну дифференциальную формулу *):

$$\tau_{\mu\nu}^l(g) = \frac{(-1)^{l-\mu}}{(l+\mu)!} e^{i(\mu\psi + \nu\varphi)} t^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)} (1-t)^{\frac{1}{2}(\mu-\nu)} P_{-\mu, -\nu}^l(t).$$

Выясним теперь связь полученных функций с представлениями группы вращений SO(3). Заметим, что введенная нами параметризация группы SU(2) равносильна

*) Заметим, что $P_{-\mu, -\nu}^l(t) = \frac{d^{l+\mu}}{dt^{l+\mu}} [t^{l-\nu} (1-t)^{l+\nu}]$.

следующему разложению:

$$g = h(\psi) g_0(\theta) h(\phi),$$

где $h(\phi)$ означает диагональную матрицу с собственными значениями $e^{-i\phi/2}$, $e^{i\phi/2}$ и $g_0(\theta)$ означает матрицу вида

$$(g_0(\theta)) = \begin{vmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{vmatrix}, \quad t^2 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Используя правило соответствия между $SU(2)$, $SO(3)$ (§ 11), легко проверяем, что ψ , θ , ϕ являются обычными углами Эйлера. Условившись записывать трехмерные векторы в виде строк, мы получаем преобразования $g \in SO(3)$ в виде ξg , где ξ — трехмерный вектор. Полагая

$$\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2,$$

мы можем, в частности, рассматривать сферу S : $\xi^2 = 1$. Как мы видели в § 17, эта сфера отождествляется с фактор-пространством G/H , где $G = SO(3)$ и H — подгруппа поворотов вокруг оси $e_3 = (0, 0, 1)$. Для перехода от G к G/H достаточно положить $\psi = 0$. Согласно теореме 2 гл. IV мы получаем следующий результат:

Следствие. Функции $Y_\mu^l = \sigma_{0\mu}^l(g)$ можно рассматривать как функции на сфере S в трехмерном евклидовом пространстве. Эти функции образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L^2(S)$.

Действительно, матричный элемент $\sigma_{\mu\nu}^l(g)$ не зависит от параметра ψ только при $\mu = 0$. Заметим, что мера Хаара dg может быть записана в виде

$$dg = \frac{1}{4\pi} d\omega \cdot \frac{1}{4\pi} d\phi,$$

где $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$ — обычная (инвариантная) мера на сфере S . Пространство $L^2(S)$ определяется по отношению к этой мере. При этом согласно теореме 4 мы имеем

$$\int |Y_\mu^l|^2 d\omega = \frac{4\pi}{2l+1}.$$

Этим однозначно, с точностью до множителя, по модулю равного единице, определяется нормировка функций Y_μ^l . Нетрудно видеть, что функции Y_μ^l являются *обычными сферическими функциями*.

Функции $\tau_{\mu\nu}^l(g)$ также бывают полезны при изучении векторных полей на сфере S ([1], [71]). Эти функции называются *шаровыми функциями* на S .

В заключение этого параграфа покажем, как при помощи теории представлений можно непосредственно построить теорию сферических функций на сфере S . Пусть E — трехмерное вещественное евклидово пространство с метрикой $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Положим $G = \text{SO}(3, \mathbb{R})$ и рассмотрим представление

$$T_g f(x) = f(xg)$$

группы G в пространстве полиномов $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$. Здесь, как и выше, вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ записывается в виде строки и умножение xg означает умножение строки x на матрицу g . Выбирая в группе G однопараметрические подгруппы, соответствующие вращениям вокруг осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 , находим соответствующие инфинитезимальные операторы представления T_g :

$$A_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad A_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad A_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Из этих операторов A_1, A_2, A_3 составим оператор Казимира:

$$C = -A_1^2 - A_2^2 - A_3^2,$$

который перестановочен со всеми операторами A_1, A_2, A_3 . Путем несложных вычислений (учитывающих некоммутативность $x_i, \partial/\partial x_i$) находим для этого оператора следующее выражение:

$$C = -x^2 \Delta + L(L+1).$$

Здесь Δ — оператор Лапласа $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)$ и L означает

оператор Эйлера $\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$. Символом x^2 обозначен оператор умножения на $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Покажем, как при помощи оператора Казимира можно произвести спектральный анализ представления T_g .

Рассмотрим подпространство P_l всех однородных полиномов степени l . Это пространство инвариантно относительно T_g . Поскольку это подпространство конечномерно, то оно вполне приводимо относительно T_g . На каждом неприводимом подпространстве оператор C , согласно лемме Шура, должен быть кратен единичному: $C = \lambda I$. С другой стороны, в силу однородности оператор Эйлера

тоже кратен единичному: $L = lI$, где l — степень однородности. Следовательно,

$$\lambda f = -x^2 \Delta f + l(l+1)f$$

для каждого вектора f , лежащего в неприводимом подпространстве. Следовательно, каждый такой вектор f является собственным относительно оператора $x^2\Delta$.

В частности, пусть H_l — подпространство всех гармонических полиномов степени однородности l . Если $f \in H_l$, то $\Delta f = 0$, и в этом случае $\lambda = l(l+1)$. Отсюда следует, что представление в H_l может содержать неприводимые представления только со старшим весом l . Поскольку, как легко проверить, $\dim H_l = 2l+1$, то H_l в действительности неприводимо.

Замечание 4. Мы показали, что *всякое неприводимое представление группы $SU(2)$ с целым старшим весом $l = 0, 1, 2, \dots$ может быть реализовано в классе гармонических полиномов $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$.*

Далее, в пространстве P_l существуют подпространства вида x^2H_{l-2} , x^4H_{l-4} , ... Нетрудно проверить, что все они по-прежнему неприводимы и содержат старшие веса $l-2$, $l-4$, ... Из сравнения размерностей получаем следующее тождество:

$$P_l = H_l + x^2H_{l-2} + x^4H_{l-4} + \dots$$

Это означает, что всякий однородный полином $f \in P_l$ разлагается по гармоническим полиномам с коэффициентами, зависящими от x^2 . Полагая $x^2 = 1$, заключаем, что *всякий полином $f(x)$ разлагается на сфере S по гармоническим полиномам*. Значение гармонического полинома на сфере S называется *сферической функцией*.

Мы получили *теорему полноты* для сферических функций в классе полиномов на S . Отсюда обычным образом следует теорема полноты в классе непрерывных функций на S , а также теорема полноты в классе $L^2(S)$.

§ 39. О некоторых группах, связанных с $SU(2)$

Здесь имеются в виду следующие группы: $SO(3)$, $SO(4)$, $SL(2)$, $U(2)$, $GL(2)$. Все эти группы, за исключением $U(2)$, могут определяться как над комплексным, так и над вещественным полем. Мы покажем, что существует определенное соответствие между представлениями всех этих групп и группы $SU(2)$.

1. $SO(3, R)$. Поскольку $SU(2)$ является двукратным накрытием $SO(3, R)$ с ядром из матриц e , $-e$, то всякое представление $SO(3, R)$ можно также рассматривать как представление $SU(2)$, удовлетворяющее *условию четности*: $T_{-e} = T_e$. В этом случае также

$$T_- = T_g$$