тоже кратен единичному: $L = lI$, где l — степень однородности. Следовательно,

$$\lambda f = -x^2 \Delta f + l(l+1) f$$

для каждого вектора f, лежащего в неприводимом подпространстве. Следовательно, каждый такой вектор f является собственным относительно оператора $x^2\Delta$.

В частности, пусть H_l — подпространство всех *гармонических* полиномов степени однородности l. Если $f \in N_l$, то $\Delta f = 0$, и в этом случае $\lambda = l(l+1)$. Отсюда следует, что представление в H_l может содержать неприводимые представления только со старшим весом l. Поскольку, как легко проверить, $\dim H_l = 2l + 1$, то H_l в действительности неприводимо.

Замечание 4. Мы показали, что *всякое неприводимое представление группы* SU(2) *с целым старшим весом* $l = 0, 1, 2, \ldots$ *может быть реализовано в классе гармонических полиномов* $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$.

Далее, в пространстве P_l существуют подпространства вида x^2H_{l-2}, x^4H_{l-4}, ... Нетрудно проверить, что все они по-прежнему неприводимы и содержат старшие веса $l-2$, $l-4$, ... Из сравнения размерностей получаем следующее тождество:

$$P_l = H_l + x^2H_{l-2} + x^4H_{l-4} + \ldots$$

Это означает, что всякий однородный полином $f \in P_l$ разлагается по гармоническим полиномам с коэффициентами, зависящими от x^2. Полагая $x^2 = 1$, заключаем, что *всякий полином* $f(x)$ *разлагается на сфере* S *по гармоническим полиномам*. Значение гармонического полинома на сфере S называется *сферической функцией*.

Мы получили *теорему полноты* для сферических функций в классе полиномов на S. Отсюда обычным образом следует теорема полноты в классе непрерывных функций на S, а также теорема полноты в классе $L^2(S)$.

§ 39. О некоторых группах, связанных с SU(2)

Здесь имеются в виду следующие группы: SO(3), SO(4), SL(2), U(2), GL(2). Все эти группы, за исключением U(2), могут определяться как над комплексным, так и над вещественным полем. Мы покажем, что существует определенное соответствие между представлениями всех этих групп и группы SU(2).

1. SO(3, $\boldsymbol{R}$). Поскольку SU(2) является двукратным накрытием SO(3, $\boldsymbol{R}$) с ядром из матриц e, $-e$, то всякое представление SO(3, $\boldsymbol{R}$) можно также рассматривать как представление SU(2), удовлетворяющее *условию четности*: $T_{-e} = T_e$. В этом случае также

$$T_{-} = T_g$$

для всякого $g \in SU(2)$. Обратно, если представление T_g удовлетворяет условию четности, то его можно рассматривать как однозначное представление $SO(3, \boldsymbol{R})$. Для неприводимых представлений $\boldsymbol{d}^m$ условие четности равносильно четности m, т. е. целочисленности $l = m/2$. В предыдущем параграфе мы видели, что все такие представления могут быть реализованы в классе гармонических полиномов (или, что то же самое, в классе сферических функций) в трехмерном евклидовом пространстве.

Если представление группы $SU(2)$ не удовлетворяет условию четности, то его по-прежнему можно рассматривать как «двузначное представление» $SO(3, \boldsymbol{R})$. В частности, двумерное представление $SU(2)$ $(l = 1/2)$ относится к числу таких представлений. Это представление обычно называется *спинорным*.

2. $SL(2, \boldsymbol{C})$. Как мы видели при построении неприводимых представлений $SU(2)$, всякое такое представление может быть продолжено до представления

$$T_g f(z) = (\beta z + \delta)^m f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right), \qquad g \in SL(2, \boldsymbol{C}),$$

операторы которого являются комплексно-аналитическими функциями от параметров в $SL(2, \boldsymbol{C})$. Заметим теперь, что в группе $SL(2, \boldsymbol{C})$ существует *комплексное сопряжение* $g \to \bar{g}$. (В $SU(2)$ такая операция сводится к g'^{-1}.) Поскольку комплексное сопряжение является автоморфизмом, то операторы $\bar{T}_g = T_{\bar{g}}$ по-прежнему определяют представление группы G. Иначе говоря, мы получаем новую серию неприводимых представлений:

$$T_g f(z) = \overline{(\beta z + \delta)}^m f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right).$$

Здесь по-прежнему мы пишем символ $f(z)$, однако теперь этот символ означает полином от *комплексно сопряженной переменной* $\bar{z}$. Операторная функция T_g является теперь *антианалитической* и поэтому не может быть эквивалентна ни одному из представлений $\boldsymbol{d}^m$ (за исключением тривиального случая $m = 0$). Полученное представление обозначим символом $\bar{\boldsymbol{d}}^m$. Обе серии

представлений включаются в следующую общую серию:

$$T_g f(z) = (\beta z + \delta)^m \overline{(\beta z + \delta)}^{m'} f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right).$$

В этом случае пространство представления зависит от двух чисел m, m' и определяется как множество всех полиномов степени не выше m по z, не выше m' по $\bar{z}$. Обозначим это представление $\boldsymbol{d}^m \bar{\boldsymbol{d}}^{m'}$. Как следует из данного определения, такое представление совпадает в то же время с теазорным произведением $\boldsymbol{d}^m \otimes \bar{\boldsymbol{d}}^{m'}$.

Покажем, что такое представление в действительности неприводимо. Для доказательства нам будет удобно воспользоваться формальными дифференциальными операторами

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Как известно, в классе полиномов (и даже в классе степенных рядов) эти операторы действуют как обычные частные дифференцирования по формально независимым переменным z, $\bar{z}$. Нетрудно видеть, что операторы $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ содержатся среди инфинитезимальных операторов группы $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$. Действительно, полагая

$$g_+(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{Vmatrix}$$

с комплексным параметром t, мы получим две вещественные однопараметрические подгруппы при $\operatorname{Im} t = 0$, $\operatorname{Re} t = 0$. Операторы $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ являются инфинитезимальными операторами этих подгрупп. Следовательно, если $\mathfrak{D}$ — класс комплексных линейных комбинаций инфинитезимальных операторов $\boldsymbol{d}^m \bar{\boldsymbol{d}}^{m'}$, то $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \in \mathfrak{D}$. Далее, полагая

$$g_-(t) = \begin{Vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

мы получим следующее семейство операторов представления:

$$F_-(t)f(z)=(1+tz)^m(1+\bar{t}\bar{z})^{m'}f\left(\frac{z}{1+tz}\right).$$

Если нас интересуют элементы класса $\mathfrak{D}$, то мы можем непосредственно производить дифференцирование по t, $\bar{t}$, полагая затем $t=0$. В результате получаем следующие два оператора:

$$E_-=mz-z\frac{\partial}{\partial z},\quad \bar{E}_-=m'\bar{z}-\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}.$$

Вернемся теперь к поставленной выше задаче. Пусть $f(z)\neq 0$ — произвольный полином из пространства представления. Применяя к нему нужное число раз операторы $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$, получаем константу, отличную от нуля. Следовательно, функция $f_0(z)\equiv 1$ содержится в циклической оболочке $f(z)$. Далее, применяя к этой функции нужное число раз операторы E_-, $\bar{E}_-$, получаем все базисные одночлены $z^k\bar{z}^{k'}$, $0\leqslant k\leqslant m$, $0\leqslant k'\leqslant m'$. Следовательно, $\boldsymbol{d}^m\bar{\boldsymbol{d}}^{m'}$ неприводимо.

Замечание 1. Существенно отметить, что представления $\boldsymbol{d}^m\otimes\boldsymbol{d}^{m'}$, $\bar{\boldsymbol{d}}^m\otimes\bar{\boldsymbol{d}}^{m'}$, как правило, приводимы. Например, $\boldsymbol{d}^1\otimes\boldsymbol{d}^1$ означает преобразование в классе тензоров второго ранга, откуда легко получить, что $\boldsymbol{d}^1\otimes\boldsymbol{d}^1=\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{d}^0$ (симметричные и антисимметричные тензоры)*).

Замечание 2. Представление $\bar{\boldsymbol{d}}^m$, суженное на подгруппу SU(2), совпадает с $(\boldsymbol{d}^m)^\wedge$ (контрагредиентное представление); но это представление, как мы знаем, эквивалентно $\boldsymbol{d}^m$. Следовательно, сужение $\boldsymbol{d}^m\otimes\bar{\boldsymbol{d}}^{m'}$ на

---

*) Индуктивно применяя указанную выше формулу, нетрудно также получить следующий общий результат:

$$d(l_1)\otimes d(l_2)=\sum_{|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}d(l).$$

Более подробно о тензорных произведениях будет сказано в гл. XII.

подгруппу $SU(2)$ эквивалентно тензорному произведению $\boldsymbol{d}^m \otimes \boldsymbol{d}^{m'}$. Такое представление неприводимо только при $m = 0$ либо при $m' = 0$.

Замечание 3. Представления $\boldsymbol{d}^m \otimes \bar{\boldsymbol{d}}^{m'}$ при $m' \neq 0$ характеризуют, в сущности, группу $SL(2, \boldsymbol{C})$ как *вещественную группу Ли* удвоенной размерности. В то же время $\boldsymbol{d}^m$ сохраняет комплексную структуру этой группы. Дифференциал такого представления линеен над комплексным полем: $D(\lambda x) = \lambda D(x)$. Дифференциал $\bar{\boldsymbol{d}}^m$ антилинеен над комплексным полем: $D(\lambda x) = \bar{\lambda} D(x)$. Более подробно о классификации таких представлений будет сказано в гл. VII.

В гл. VII мы увидим, что серия $\boldsymbol{d}^m \bar{\boldsymbol{d}}^{m'}$ исчерпывает *все* (с точностью до эквивалентности) неприводимые представления $SL(2, \boldsymbol{C})$.

3. Группа Лоренца. Пусть L — связная компонента единицы в группе всех псевдоевклидовых вращений, сохраняющих форму $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ (координаты x_i вещественны). Как мы видели в § 11, $L \approx SL(2, \boldsymbol{C})/N$, где N состоит из матриц вида e, $-e$. Представление $\boldsymbol{d}^m \bar{\boldsymbol{d}}^{m'}$ является однозначным представлением группы Лоренца L тогда и только тогда, когда число $m + m'$ является четным.

4. $SL(2, \boldsymbol{R})$. Алгебра Ли этой группы имеет базис e_-, e_0, e_+ с соотношениями коммутации $[e_0, e_+] = e_+$, $[e_0, e_-] = -e_-$, $[e_+, e_-] = 2e_0$. Следовательно, в данном случае можно непосредственно использовать алгебраический результат теоремы 2. Формула

$$T_g f(z) = (\beta z + \delta)^m f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right),$$

где α, β, γ, δ, z вещественны и $f(z)$ — полином от z степени не выше m, определяет все неприводимые представления $SL(2, \boldsymbol{R})$ с точностью до эквивалентности.

5. $U(2)$. Как мы видели в § 9, $U(2) \approx U(1) \otimes SU(2)$. Проекция на $U(1)$ определяется отображением $g \to \det g$. Поскольку операторы из $U(1)$ перестановочны со всеми операторами $U(2)$, то они являются скалярами (согласно лемме Шура) в любом неприводимом представлении

U(2). Полагая $\det g = e^{i\varphi}$, замечаем, что указанное скалярное отображение должно с необходимостью иметь вид $e^{in\varphi} = (\det g)^n$, где n — целое число (это условие вытекает из однородности представления). Формула

$$T_g f(z) = (\det g)^n (\beta z + \delta)^m f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)$$

определяет общий вид неприводимого представления группы U(2). Здесь m — неотрицательное целое число и n — произвольное целое число. Если сделать n нецелым, то соответствующая функция T_g станет неоднозначной.

6. GL(2, $\boldsymbol{C}$). То же рассуждение можно повторить и в данном случае. Поскольку $\det g = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, то скалярный множитель в формуле для представления может иметь вид $(\det g)^n \overline{(\det g)}^{n'}$, где разность $n - n'$ обязательно является целой. (Действительно, $(\det g)^n \overline{(\det g)}^{n'} = \rho^{n+n'} e^{i(n-n')\varphi}$.)

Замечание 4. Отсюда очевидно существование не вполне приводимых («полуприводимых») представлений GL(n). Примером является $\begin{Vmatrix} 1 & \ln\rho \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, где $\rho = |\det g|$.

7. GL(2, $\boldsymbol{R}$). Рассуждения остаются прежними. Если ограничиться связной подгруппой G^+, выделяемой условием $\det g = \rho > 0$, то получаем всевозможные степени $(\det g)^\lambda$, где λ — произвольное комплексное число. Если же рассматривать всю группу G, то скалярный множитель в операторе представления может иметь либо вид ρ^λ, либо $\rho^\lambda \operatorname{sgn}\rho$, где $\rho = \det g \neq 0$. Соответственно получаем две различные серии неприводимых представлений группы G. Можно показать, что этими сериями исчерпываются все неприводимые (конечномерные) представления данной группы.

До сих пор мы рассматривали группу SO(3) только над вещественным полем. Если поле становится комплексным, то все неприводимые представления SO(3, $\boldsymbol{R}$) аналитически продолжаются на SO(3, $\boldsymbol{C}$). Более подробно процесс аналитического продолжения будет рассмотрен в следующей главе.