§ 40. О некоторых проблемах инфинитезимального метода

Желая исследовать структуру группы Ли или свойства ее линейных представлений при помощи инфинитезимального метода, мы должны постоянно иметь в виду некоторые сложности, связанные с процессом «интегрирования», т. е. с переходом от алгебры Ли к группе Ли.

Прежде всего, естественно возникают следующие вопросы:

Вопрос 1. *Пусть G — группа Ли и X — ее алгебра Ли. Верно ли, что всякому линейному представлению алгебры X соответствует линейное представление группы G (по отношению к которому данное представление является дифференциалом)?*

Вопрос 2. *Пусть G — группа Ли и X — ее алгебра Ли. Верно ли, что всякой подалгебре $X_0 \subset X$ соответствует замкнутая подгруппа $G_0 \subset G$ (имеющая X_0 своей алгеброй Ли)?*

Ответ на первый вопрос является *отрицательным*, даже если группа G является связной и представление $D(x)$ конечномерно. Действительно, операторная функция T_g определяется посредством экспоненциального отображения лишь на некоторой окрестности единицы в группе G. Используя трансляции, можно продолжить T_g и на всю группу G, но полученная функция T_g может оказаться неоднозначной. (Пример: если $G = \{e^{ix}, 0 \leqslant x < 2\pi\}$, то представление $D(x) = \lambda x$ может быть продолжено на группу G только при целом λ.) Однако если G односвязна, то функция T_g не может быть многозначной. Действительно, в противном случае многообразие $\{T_g\}$ накрывало бы группу G. Следовательно, в этом случае первый вопрос решается положительно.

В дальнейшем мы для краткости условимся считать, что термин «односвязность» включает в себя также и предположение о связности. В частности, под термином «односвязная группа» условимся понимать односвязную связную группу.

Ответ на второй вопрос также является отрицательным, как показывает *иррациональная обмотка тора*. Действительно, пусть G — двумерный тор, порожденный

всеми унитарными диагональными матрицами второго порядка. Положим

$$\varepsilon = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix},$$

где отношение a/b иррационально и числа a, b вещественны. Поскольку матрица ε эрмитова, то матрица $\exp it\varepsilon$ унитарна при всяком t, $-\infty < t < \infty$. Однопараметрическая подгруппа

$$g(t) = \exp it\varepsilon$$

является иррациональной обмоткой тора G (§ 15). Замыкание этой подгруппы совпадает со всем тором G. В этом случае одномерной подалгебре $X_0 = \{t\varepsilon\}$ не соответствует замкнутая однопараметрическая подгруппа в группе G.

В дальнейшем мы увидим тем не менее, что во многих важных случаях ответ на второй вопрос все-таки является положительным. Один из указанных частных случаев описывается следующей теоремой:

Теорема 5. *Пусть G — компактная группа Ли и X — ее алгебра Ли. Тогда для всякой подалгебры $X_0 \subset X$ с нулевым центром существует замкнутая подгруппа $G_0 \subset G$, для которой X_0 является алгеброй Ли.*

Доказательство. Нам будет удобно использовать линейность группы G. Более того, согласно глобальной теореме можно считать, что $G \subset O(n)$. Поскольку в условиях теоремы группа G играет роль объемлющей группы, мы можем также считать (хотя это и не обязательно), что $G = O(n)$. Все построения ведутся над полем вещественных чисел. Алгебра X состоит в этом случае из всех вещественных кососимметрических матриц порядка n.

Пусть X_0 — фиксированная подалгебра в X. Мы получим «первое приближение» к искомой группе G_0, если рассмотрим в $O(n)$ подгруппу G_1, состоящую из всех матриц g_1, для которых $g_1 X_0 g_1^{-1} = X_0$ *). Согласно этому определению группа G_1 выделяется из $O(n)$ некоторой системой полиномиальных соотношений; как увидим

*) Эта группа называется *нормализатором* X_0.

в гл. XV (теорема 4), всякая такая группа является группой Ли. Пусть X_1 — алгебра Ли группы G_1. Тогда, очевидно, $X_0 \subset X_1$.

Нетрудно видеть, что билинейная форма $(x, y) = -\operatorname{sp} xy$ является скалярным произведением в области кососимметрических матриц (т. е. в алгебре Ли $O(n)$). Пусть Y — ортогональное дополнение X_0 до X_1 относительно этого скалярного произведения. Заметим, что

$$\operatorname{sp}[x, y]z = \operatorname{sp}[z, x]y.$$

В частности, если x, $z \in X_0$ и $y \in Y$, то мы заключаем, что правая часть тождественно равна нулю ($X_0 \perp Y$). Следовательно, вектор $[x, y]$ одновременно содержится в X_0 и ортогонален X_0. Следовательно, $[x, y] = 0$, и мы заключаем, что элементы из X_0, Y взаимно перестановочны.

Далее, мы получим «второе приближение» к искомой группе G_0, если рассмотрим в G_1 подгруппу G_2, состоящую из матриц g_2, перестановочных с алгеброй Y *): $g_2 y g_2^{-1} = y$ для всякого $y \in Y$. Рассуждая, как и выше, заключаем, что G_2 — группа Ли. Пусть X_2 — ее алгебра Ли. Тогда, очевидно, $X_0 \subset X_2 \subset X_1$. Пусть Z — ортогональное дополнение X_0 до X_2.

Элементы множества Z перестановочны со всеми элементами X_0 и в то же время со всеми элементами Y (согласно определению G_2). Следовательно, Z содержится в центре X_2. В то же время согласно условиям теоремы центр подалгебры X_0 равен (0). Отсюда следует, что Z является центром в X_2. В свою очередь X_0 может быть охарактеризована как фактор-алгебра X_2/Z либо как производная подалгебра в алгебре X_2.

Теперь естественно определить искомую группу G_0 как производную подгруппу в группе G_2. При этом группа G_0 оказывается группой Ли с алгеброй Ли X_0. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 5 мы считали очевидным следующее утверждение: пусть $G_1 \subset G$ — две группы Ли и $X_1 \subset X$ — соответствующие алгебры Ли; тогда $\exp tx \in G_1$ для

*) Эта группа называется *централизатором* Y.

всякого $x \in X_1$. Действительно, это утверждение доказывается в общей теории групп Ли и составляет один из существенных моментов в соответствии между группами и алгебрами Ли. Приведем для полноты изложения доказательство этого утверждения в линейном случае $G = \mathrm{GL}(n)$.

Напомним, что алгебра X_1 определяется как касательное пространство к многообразию G_1 в точке e. Если $g \in G_1$, то gX_1 является касательным пространством к многообразию G_1 в точке g. Иначе говоря, если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ — локальные параметры точки g (достаточно близкой к e), то

$$g(\xi)\, x = \sum_{i=1}^{m} f_i(\xi, x) \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_i}$$

для всякого $x \in X_1$, где функции $f_i(\xi, x)$ непрерывно зависят от $\xi = (\xi_i)$ и $x \in X_1$. Заметим теперь, что однопараметрическая подгруппа $g(t) = \exp tx$ является решением дифференциального уравнения

$$g'(t) = g(t)\, x, \qquad x \in X_1,$$

с начальным условием $g(0) = e$. Если функции $\xi_i = \xi_i(t)$ определить как решения дифференциального уравнения $\xi_i'(t) = f_i(\xi(t), x)$ с начальным условием $\xi_i(0) = 0$, то функция $\tilde{g}(t) = g(\xi(t))$ будет решением указанного выше уравнения (при достаточно малых t) с начальным условием $\tilde{g}(0) = e$. В силу теоремы единственности $\tilde{g}(t) = g(t)$. Это показывает, что $g(t) \in G_1$ при достаточно малых t.

Далее, пусть t_0 — точная верхняя грань тех t, для которых $g(t) \in G_1$. Положим $f(t) = g(t_0 + t)$. Тогда полученная функция $f(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$f'(t) = f(t)\, x$$

с начальным условием $f(0) = g(t_0) \in G_1$. Повторяя предыдущие рассуждения, заключаем, что $f(t) \in G_1$ при достаточно малых t. Но это противоречит определению t_0. Следовательно, $g(t) \in G_1$ при $-\infty < t < \infty$, и наше утверждение доказано.

Отсюда также легко получить, что если X_0 — подалгебра в X_1 и G_0 — замкнутая связная подгруппа в G с алгеброй Ли X_0, то в действительности $G_0 \subset G_1$ (это утверждение мы также считали очевидным при доказательстве теоремы 5, полагая $G = O(n, \boldsymbol{R})$).

В теории групп Ли доказывается следующая общая теорема. Пусть G — группа Ли и X — ее алгебра Ли. Тогда для каждой подалгебры $X_0 \subset X$ существует локально замкнутая подгруппа $G_0 \subset G$, называемая *аналитической подгруппой*. Таким образом, *существует взаимно однозначное соответствие между подалгебрами в алгебре Ли и аналитическими подгруппами в группе G.*

Если ограничиться некоторой достаточно малой окрестностью единичной точки, то мы получаем множество, называемое *локальной группой Ли*. Это множество однозначно покрывается экспоненциальным отображением, и в нем существует также взаимно однозначное соответствие между подалгебрами Ли и локальными подгруппами. Отметим еще один важный вопрос:

Вопрос 3. *Пусть G — группа Ли и X — ее алгебра Ли. Верно ли, что каждому разложению $X = X_1 + X_2$, где X_1, X_2 — подалгебры, отвечает разложение $G = G_1G_2$, где G_1, G_2 — соответствующие аналитические подгруппы?*

Если заменить группу G локальной группой Ли, то ответ является положительным (см., например, [46], т. III, стр. 180). Глобальное утверждение также имеет место для некоторых частных случаев: а) группа G односвязна, G_1 (или G_2) инвариантно в G относительно внутренних автоморфизмов; б) группа G_1 является максимальной компактной подгруппой в G, и подгруппа G_2 односвязна. См. по этому поводу, например, [108], [128]. Некоторые случаи таких разложений мы будем рассматривать далее (гл. XV). Там же будет рассмотрен пример разложения («разложения Гаусса»), когда множество $G_0 = G_1G_2$ не заполняет группы G, но всюду плотно в G.

Хотя, как мы видим, ответ на последний вопрос является отрицательным, существует несколько более слабая положительная формулировка. Напомним (§ 3), что если группа G является связной, то всякая окрестность единицы определяет в этой группе систему образующих. Следовательно, если U — такая окрестность, то G является объединением возрастающего семейства окрестностей U^m, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Если $U = U_1U_2$, где U_1, U_2 — локальные группы в G_1, G_2, то мы находим в результате, что всякий элемент $g \in G$ может быть представлен в виде конечного произведения $g_1h_1g_2h_2 \ldots g_mh_m$, где $g_1, g_2, \ldots \in U_1$ и $h_1, h_2, \ldots \in U_2$.

В заключение вернемся к вопросу 1 в связи с теорией бесконечномерных представлений. В этом случае проблема является еще более сложной, хотя бы потому, что $\exp D(x)$ не всегда существует. Более того, если даже

представление T_g определено, то оно не обязательно аналитично. В частности, если $g(t) = \exp tx$, то не обязательно $T_{g(t)} = \exp tD(x)$.

Каждый вектор $\xi \in V$, для которого вектор-функция $T_g\xi$ аналитична, называется *аналитическим*. Если V — банахово пространство, то множество всех аналитических векторов всюду плотно в V ([75], [98], [100], [119]). В классе аналитических векторов соответствие между представлением T_g и его дифференциалом взаимно однозначно. В общем случае мы не можем даже утверждать, что из неприводимости T_g следует неприводимость $D(x)$ (и также что из приводимости $D(x)$ следует приводимость T_g). Действительно, возможно существование линейных многообразий, инвариантных относительно $D(x)$, замыкание которых не инвариантно относительно T_g ([98]).

Вместе с тем мы видим, что если ограничиться конечномерными представлениями и односвязными группами Ли, то применение инфинитезимального метода не вызывает препятствий. Рассмотрение неодносвязной группы также не вызывает особых сложностей ввиду наличия универсальной накрывающей.

* * *

В первоначальных работах С. Ли рассматривались только локальные группы Ли, причем, как правило, группы дифференцируемых преобразований в евклидовых пространствах. Глобальная теория разработана значительно позже (см. по этому поводу, например, [38], [46], [128]). К локальным методам естественно приводит рассмотрение многих вопросов классической и квантовой механики. Как уже было сказано во введении к этой главе, мы рассматриваем здесь лишь простейшие вопросы инфинитезимального метода.

Задача описания неприводимых представлений группы SU(2) дает классический пример для иллюстрации инфинитезимального метода. Глобальное решение этой задачи изложено в статье [84]. В этой же статье был предложен простой вывод формулы для матричных элементов (теорема 4). По поводу иной методики см. также значительно более подробное изложение в статье [71]. См. также [18], [37], [66] и монографию [14], где дается значительно более общая теория специальных функций.