

ГЛАВА VI

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Идея аналитического продолжения, столь плодо-творная в общей теории функций комплексного переменного, играет принципиальную роль также и в общей теории представлений. Этот метод в теорию представлений был впервые введен в работах Г. Вейля. В частности, он оказывается особенно эффективным при рассмотрении компактной группы Ли и ее комплексной оболочки.

Если G — компактная группа Ли ненулевой размерности, то ее комплексная оболочка всегда является некомпактной. Этот результат, который мы в дальнейшем сумеем строго доказать, является следствием того простого замечания, что вместе с каждым «тригонометрическим поворотом» комплексная оболочка содержит также и некоторый «гиперболический поворот». Следовательно, в наше рассмотрение включается существенно новый класс некомпактных групп Ли, которые в этой главе будут названы «надкомпактными».

Заметим, что метод аналитического продолжения можно развивать локально и «в целом»; первый путь, по существу, уже использовался нами при введении «понижающих» и «повышающих» операторов для $SU(2)$. В этой главе мы изложим основы аналитического метода «в целом».

§ 41. Общий принцип аналитического продолжения

Метод аналитического продолжения состоит в продолжении операторной функции T_g (T_g — представление группы G) на комплексные значения параметров группы, т. е. на комплексную оболочку группы G . Разумеется, при этом мы полагаем, что G — группа Ли и T_g — ее вещественно-аналитическое представление, которое задается локальными рядами Тейлора в окрестности каждой точки $g_0 \in G$. Прежде чем перейти к более точным

определениям, мы рассмотрим следующие простые примеры.

Пример 1. Комплексная плоскость с выколотой точкой 0 является комплексной оболочкой группы чисел $e^{i\varphi}$. Всякое неприводимое представление $e^{in\varphi}$ (n целое) однозначно продолжается до представления z^n , где $z = re^{i\varphi}$ — произвольный элемент комплексной оболочки.

Пример 2. Та же комплексная плоскость является комплексной оболочкой связной группы положительных чисел $\rho > 0$. Всякое неприводимое представление ρ^λ (λ комплексное) продолжается до функции z^λ , которую можно рассматривать как «многозначное представление» комплексной оболочки. Эта функция однозначна только при целом λ .

Пример 3. Та же комплексная плоскость является комплексной оболочкой несвязной группы всех вещественных чисел $x \neq 0$. Существуют представления этой группы, например $\operatorname{sgn} x$, которые не продолжаются до аналитических функций на комплексной оболочке. (Действительно, если аналитическая функция равна единице при $z = x > 0$, то она тождественно равна единице.)

Анализ этих примеров показывает, что при формулировке метода аналитического продолжения приходится соблюдать известные предосторожности. Прежде всего, согласно примеру 3 естественно требовать, чтобы различные связные листы исходной вещественной группы G оставались изолированными друг от друга также и в комплексной оболочке. (В противном случае локальные ряды Тейлора, определенные на этих листах, могут привести к различным аналитическим функциям.) В результате мы приходим к следующему определению:

Определение 1. Комплексную группу \mathfrak{G} мы будем называть *правильной комплексной оболочкой* вещественной группы G , если \mathfrak{G} является комплексной оболочкой G и если в каждой связной компоненте \mathfrak{G} содержится лишь одна связная компонента группы G .

В частности, если \mathfrak{G} является связной, то и подгруппа G согласно этому определению должна быть связной. Таким образом, группа комплексных чисел по умножению является правильной комплексной оболочкой группы положительных чисел по умножению, но это уже

неверно, если вместо последней группы рассматривать группу всех вещественных чисел по умножению. Далее, согласно примеру 2 естественно также обобщить само понятие представления.

Определение 2. Пусть \mathfrak{G} — комплексная группа Ли. Операторная функция T_g будет называться *аналитическим представлением* группы \mathfrak{G} , если:

1) функция T_g является комплексно-аналитической (возможно, многозначной) функцией на G ;

2) для каждой пары значений T_{g_1}, T_{g_2} найдется такое значение $T_{g_1 \cdot g_2}$, что $T_{g_1 \cdot g_2} = T_{g_1} T_{g_2}$;

3) всякое значение T_e обратимо, и одним из значений T_e является единичный оператор в пространстве представления.

Аналогичное определение с заменой условия аналитичности условием вещественной аналитичности (или непрерывности) приводит также к понятию многозначного представления произвольной вещественной группы Ли. Если представление T_g конечномерно, то условие аналитичности функции T_g равносильно условию аналитичности всех матричных элементов $t_{ij}(g)$ (относительно любого фиксированного базиса в пространстве представления). Если представление бесконечномерно, то необходимо указывать топологию в классе операторов, по отношению к которой вводится понятие аналитичности. Мы, однако, будем рассматривать, как правило, только конечномерные представления.

Пример 4. Матричная функция

$$f(z) = \begin{vmatrix} 1 & \ln z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

является аналитическим (счетнозначным) представлением мультипликативной группы комплексных чисел.

Прежде чем перейти к изложению общей теории, сделаем несколько простых замечаний.

Замечание 1. Поскольку аналитические функции всегда являются комплекснозначными (за исключением тривиального случая $f(z) \equiv 1$), то процесс аналитического продолжения может привести к окомплексиванию пространства представления. Чтобы не заботиться об

этом, мы условимся пространство V заранее предполагать комплексным. (Если исходное пространство V_0 было вещественным, то всякий линейный оператор A , и в том числе T_g , переносится на $V = V_0 + iV_0$ по правилу линейности: $A(x + iy) = Ax + iAy$.)

Замечание 2. Если комплексная группа \mathfrak{G} является односвязной, то ее аналитическое представление T_g не может быть многозначным. Это утверждение является следствием известного принципа «монодромии» и может быть легко доказано посредством «триангulation» многообразия \mathfrak{G} . (Напомним, что согласно условию, принятому в предыдущей главе, под термином «односвязность» подразумевается также и связность.) Следовательно, в этом случае аналитические представления группы \mathfrak{G} являются также ее представлениями в обычном смысле. Это замечание мы будем иногда использовать в дальнейшем.

Замечание 3. Пусть T_g — аналитическое представление группы G и T_g — множество значений функции T_g в точке g . Тогда очевидно, что множество T_e является группой. Согласно известным свойствам аналитических функций все они не более чем счетнозначны. В частности, T_e является дискретной группой. Далее,

$$T_g = T_g T_e = T_e T_g,$$

т. е. множество T_g получается из группы T_e путем умножения (слева или справа) на одно из значений T_g в точке g . Следовательно, T_e является инвариантной подгруппой относительно отображения $A \rightarrow T_g A T_g^{-1}$. Если группа G является связной, то отсюда, как и в § 5, легко получаем, что множество T_e содержится в центре представления T_g . Следовательно,

$$T_e T_g = T_g T_e$$

для каждой пары индивидуальных значений T_e , T_g . Если представление T_g неприводимо, то отсюда согласно лемме Шура следует скалярность операторов T_e . Заметим, что в этом случае закон композиции в представлении T_g может быть записан следующим образом:

$$T_{g_1} T_{g_2} = \lambda(e) T_{g_1 g_2},$$

где $\lambda(e)$ — один из возможных скаляров, к которым

сводится оператор T_e . Такие представления иногда называют *проективными*. Множество $\{\lambda(e)\}$ представляет собой дискретную абелеву группу комплексных чисел. В частности, если T_g конечноизначно, то множество $\{\lambda(e)\}$ конечно и сводится к прямому произведению некоторого числа циклических групп *).

Заметим также, что множество T_e всегда определяет степень многозначности данного представления (согласно формуле $T_g = T_g T_e$, отмеченной выше). В частности, T_g однозначно тогда и только тогда, когда множество T_e состоит из оператора I .

После этих предварительных замечаний сформулируем и докажем следующий общий результат:

Теорема 1. *Пусть \mathfrak{G} — правильная комплексная оболочка вещественной группы G . Тогда всякое конечно-мерное представление группы G может быть продолжено до аналитического (вообще говоря, многозначного) представления группы \mathfrak{G} .*

Продолженное представление неприводимо, приводимо или вполне приводимо тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает исходное представление группы G .

Если группа \mathfrak{G} односвязна, то продолженное представление однозначно.

Доказательство. Пусть T_g — представление группы G и тот же символ T_g означает аналитическое продолжение этой функции на комплексные значения параметров в группе \mathfrak{G} . Существование такого продолжения следует из вещественной аналитичности функции T_g . Прежде всего, локальный ряд Тейлора $T_{\exp t^i e_i} = \exp t^i E_i$ продолжается на некоторую окрестность $U \subset \mathfrak{G}$ (параметры t^i полагаются комплексными). Далее, поскольку степени окрестности U покрывают всю группу \mathfrak{G} , то ясно, что функция T_g продолжается на всю группу \mathfrak{G} , т. е. ни одна из точек $g \in \mathfrak{G}$ не является особой. Мультипликативное свойство функции T_g вытекает из принципа сохранения алгебраических соотношений (при аналитическом продолжении). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

*) См. упражнение 2 на стр. 140, а также [38], стр. 43.

Далее заметим, что свойства приводимости и полной приводимости могут быть выражены в терминах обращения в нуль некоторых матричных элементов $\tau_{ij}(g)$ (при соответствующем выборе базиса). Если такой элемент обращается в нуль на \mathfrak{G} , то он, в частности, равен нулю и на G . Обратно, в силу принципа единственности аналитического продолжения, если этот элемент равняется нулю на G , то он обращается в нуль также и на всей группе \mathfrak{G} . Тем самым наше утверждение доказано для свойства приводимости и полной приводимости, но тогда и для свойства неприводимости (как отрицания приводимости).

Наконец, если \mathfrak{G} односвязна, то согласно замечанию 2 («принцип монодромии») представление T_g должно быть однозначным.

Теорема доказана.

Мы условимся называть теорему 1 *общим принципом аналитического продолжения*. Разумеется, это название условно, хотя бы потому, что в условиях теоремы 1 рассматриваются только конечномерные представления. Однако нетрудно обобщить эту теорему на случай, когда представление T_g бесконечномерно и вещественно-аналитично. Отметим два очевидных следствия из этой теоремы:

Следствие 1. Существует взаимно однозначное соответствие (определенное сужением $\mathfrak{G} \rightarrow G$) между неприводимыми аналитическими представлениями группы \mathfrak{G} и неприводимыми, вообще говоря, многозначными представлениями группы G .

Следствие 2. Спектральный анализ в классе вполне приводимых представлений группы G расносителен спектральному анализу в классе их аналитических продолжений.

В заключение заметим, что если группу \mathfrak{G} рассматривать как вещественную, то ее комплексно-аналитические представления далеко не исчерпывают всех вещественных представлений группы \mathfrak{G} .

Пример 5. Всякое неприводимое конечномерное представление группы комплексных чисел по умножению одномерно и задается формулой

$$f(z) = z^p \bar{z}^q,$$

где разность $p - q$ является целой (условие однозначности представления). Это представление аналитично только при $q = 0$.

Другие примеры мы видели в § 39 при рассмотрении групп $SL(2, \mathbf{C})$, $GL(2, \mathbf{C})$. Более подробно о вещественных представлениях комплексной группы будет сказано в § 43.

Таким образом, мы видим, что аналитическое продолжение естественно приводит нас к изучению определенного класса многозначных представлений комплексной группы \mathfrak{G} .

Упражнение

Пусть $g \rightarrow T_g$ — неприводимое представление группы G в вещественном пространстве V и \tilde{T}_g — линейное продолжение T_g на комплексное пространство $\tilde{V} = V + iV$. Показать, что представление \tilde{T}_g либо неприводимо, либо распадается в прямую сумму двух неприводимых представлений, комплексно сопряженных друг другу.

§ 42. Надкомпактные группы Ли. «Унитарный трюк» Г. Вейля

Нам будет удобно использовать следующее определение:

Определение 3. Правильная комплексная оболочка компактной группы Ли будет называться *надкомпактной группой Ли*.

Условимся рассматривать конечнозначные, но, вообще говоря, бесконечномерные аналитические представления надкомпактной группы Ли. Множество таких представлений обозначим символом K .

Теорема 2. Пусть K — совокупность всех конечнозначных аналитических представлений надкомпактной группы \mathfrak{G} . Тогда всякое неприводимое представление класса K неприводимо при сужении на вещественную форму $G \subset \mathfrak{G}$. Всякое представление класса K вполне приводимо. Всякое неприводимое представление класса K конечномерно.

Доказательство. Допустим вначале, что представление T_g однозначно. Пусть V_0 — инвариантное подпространство в пространстве представления V относительно подгруппы G . Тогда для всякого линейного