где разность $p-q$ является целой (условие однозначности представления). Это представление аналитично только при $q=0$.

Другие примеры мы видели в § 39 при рассмотрении групп $SL(2, \boldsymbol{C})$, $GL(2, \boldsymbol{C})$. Более подробно о вещественных представлениях комплексной группы будет сказано в § 43.

Таким образом, мы видим, что аналитическое продолжение естественно приводит нас к изучению определенного класса многозначных представлений комплексной группы $\mathfrak{G}$.

Упражнение

Пусть $g \to T_g$ — неприводимое представление группы G в вещественном пространстве V и $\tilde{T}_g$ — линейное продолжение T_g на комплексное пространство $\tilde{V} = V + iV$. Показать, что представление $\tilde{T}_g$ либо неприводимо, либо распадается в прямую сумму двух неприводимых представлений, комплексно сопряженных друг другу.

§ 42. Надкомпактные группы Ли. «Унитарный трюк» Г. Вейля

Нам будет удобно использовать следующее определение:

Определение 3. Правильная комплексная оболочка компактной группы Ли будет называться *надкомпактной группой Ли.*

Условимся рассматривать конечнозначные, но, вообще говоря, бесконечномерные аналитические представления надкомпактной группы Ли. Множество таких представлений обозначим символом K.

Теорема 2. *Пусть K — совокупность всех конечнозначных аналитических представлений надкомпактной группы $\mathfrak{G}$. Тогда всякое неприводимое представление класса K неприводимо при сужении на вещественную форму $G \subset \mathfrak{G}$. Всякое представление класса K вполне приводимо. Всякое неприводимое представление класса K конечномерно.*

Доказательство. Допустим вначале, что представление T_g однозначно. Пусть V_0 — инвариантное подпространство в пространстве представления V относительно подгруппы G. Тогда для всякого линейного

функционала f, равного нулю на V_0, мы имеем

$$f(T_g\xi)=0, \qquad \xi\in V_0, \quad g\in G.$$

Ввиду аналитичности то же равенство верно и для всякого $g\in\mathfrak{G}$. Но тогда линейная оболочка векторов $T_g\xi$, $g\in\mathfrak{G}$, $\xi\in V_0$, не может быть шире V_0. Действительно, в силу теоремы Хана — Банаха [5] для всякого $\eta\notin V_0$ существует линейный функционал, равный нулю на V_0 и отличный от нуля в точке η. Следовательно, V_0 инвариантно также и относительно всей группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, $V_0=(0)$ или $V_0=V$ ввиду неприводимости исходного представления группы $\mathfrak{G}$.

В частности, положим $G=\mathfrak{U}$, где $\mathfrak{U}$ — компактная вещественная форма в $\mathfrak{G}$. Поскольку всякое неприводимое представление T_g остается неприводимым при сужении на подгруппу $\mathfrak{U}$, то оно конечномерно.

Далее, используя предыдущие рассуждения при $G=\mathfrak{U}$, получаем, что всякое представление класса K *вполне приводимо*. (*Более того, всякое подпространство*, неприводимое относительно $\mathfrak{G}$, остается неприводимым при сужении на $\mathfrak{U}$.)

Отбросим теперь условие однозначности; тогда T_g — конечнозначное представление группы $\mathfrak{U}$. Многообразие $\{T_g\}$ является конечным накрытием группы $\mathfrak{U}$ и, следовательно, может рассматриваться как точное представление группы $\tilde{\mathfrak{U}}$, которая является конечным накрытием группы $\mathfrak{U}$. Как следует из этого определения, группа $\tilde{\mathfrak{U}}$ является компактной. Следовательно, для нее по-прежнему верны использованные выше следствия глобальной теоремы (принцип полной приводимости, конечномерность неприводимых представлений). Заменяя в предыдущих рассуждениях группу $\mathfrak{U}$ на $\tilde{\mathfrak{U}}$, получаем прежние результаты. Теорема доказана.

Замечание 1. Покажем, что ограничение конечнозначными представлениями для нашей цели существенно. Действительно, представление

$$f(z)=\begin{Vmatrix} 1 & \ln z \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

мультипликативной группы комплексных чисел не относится к классу K и в то же время не является вполне приводимым *).

Замечание 2. Если ограничиться классом конечномерных представлений, то теорема 2 является тривиальным следствием теоремы 1 (и глобальной теоремы для компактных групп).

Следствие 1. *Если группа* $\mathfrak{G}$ *односвязна, то существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми аналитическими представлениями группы* $\mathfrak{G}$ *и неприводимыми представлениями ее компактной вещественной формы* $\mathfrak{U}$.

Здесь предполагается, как и выше, что $\mathfrak{G}$ — правильная комплексная оболочка группы $\mathfrak{U}$. Если $\mathfrak{G}$ неодносвязна, то же утверждение остается в силе для конечнозначных представлений группы $\mathfrak{G}$ (и подгруппы $\mathfrak{U}$).

Следствие 2. *Если надкомпактная группа* $\mathfrak{G}$ *линейна, то всякое ее неприводимое представление реализуется в классе тензоров* **).

В дальнейшем мы увидим (гл. XV), что *всякая надкомпактная группа Ли (связная или несвязная) имеет точное линейное представление.* Таким образом, следствие 2 в действительности справедливо для произвольной надкомпактной группы Ли.

Таким образом, мы видим, что сужение $\mathfrak{G} \to \mathfrak{U}$ позволяет использовать для комплексной группы $\mathfrak{G}$ ряд следствий из глобальной теоремы. Этот замечательный прием впервые был применен Г. Вейлем и носит название *«унитарного трюка»* Вейля. Одним из основных следствий является принцип полной приводимости для группы $\mathfrak{G}$.

---

*) В дальнейшем мы увидим, что условие надкомпактности является решающим для принципа полной приводимости (см. § 61). Пока заметим, что группа вещественных чисел по сложению, которая не является надкомпактной группой, имеет даже однозначные не вполне приводимые представления. Примером является жорданова клетка

$$f(z) = \begin{Vmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

**) Это утверждение вытекает из аналогичного свойства компактных групп. — *Прим. ред.*

В дальнейшем мы увидим, однако, что комплексная группа $\mathfrak{G}$ обладает, как правило, значительно более простой алгебраической структурой, чем группа $\mathfrak{U}$. Это позволяет использовать принцип Вейля «инверсным» образом, получая для группы $\mathfrak{U}$ информацию из рассмотрения ее комплексной оболочки $\mathfrak{G}$. Можно было последовательно провести эту точку зрения и даже полностью игнорировать глобальную теорему, развивая независимую теорию для некоторого класса комплексных групп Ли («редуктивные группы», § 88). Мы еще остановимся на этом в дальнейшем.

§ 43. Бикомплексные группы и алгебры Ли *)

В § 39 мы встретились с ситуацией (довольно обычной в анализе), когда комплексные переменные z, $\bar{z}$ (черта означает сопряжение) естественно рассматривать как независимые. Логический анализ этой ситуации нетрудно провести для произвольной группы или алгебры Ли. При этом мы получаем эффективное средство для изучения вещественных представлений комплексной группы (или алгебры) Ли.

Определение 4. Пусть X — вещественная алгебра Ли, $\mathfrak{X}$ — ее комплексная оболочка и $\tilde{\mathfrak{X}}$ — комплексная оболочка алгебры $\mathfrak{X}$, которая снова рассматривается над вещественным полем (с удвоенным числом параметров). Алгебру $\tilde{\mathfrak{X}}$ мы будем называть *бикомплексной оболочкой алгебры* X.

Пусть e_i — произвольный базис в алгебре X; тогда векторы e_k, $f_k = \sqrt{-1}\, e_k$ образуют базис в вещественной алгебре $\tilde{\mathfrak{X}}$. Если c_{ij}^k — структурные константы X, то мы имеем

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad [e_i, f_j] = [f_i, e_j] = c_{ij}^k f_k, \qquad (*)$$

$$[f_i, f_j] = -c_{ij}^k e_k.$$

Полученные формулы определяют также закон коммутации в бикомплексной оболочке $\tilde{\mathfrak{X}}$ при условии, что

*) При первом чтении этот параграф можно опустить.