

компактной, и принцип полной приводимости выполняется для всех ее аналитических представлений.

Из результатов гл. XV в действительности будет следовать, что всякая бикомплексная оболочка компактной группы Ли является надкомпактной. Отсюда вытекает доказательство следствия 2 в общем случае.

§ 44. Комплексная оболочка $U(n)$. Веса и корни

Проиллюстрируем метод аналитического продолжения на примере группы $U(n)$. Поскольку эта группа неодносвязна, нам будет удобно рассматривать вначале ее подгруппу $G_0 = \mathrm{SU}(n)$, которая получается удалением всего лишь одного вещественного параметра. При этом односвязная группа $\mathfrak{G}_0 = \mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ является правильной комплексной оболочкой группы G_0 . Ввиду односвязности все рассматриваемые ниже представления будут однозначными. Мы также не оговариваем особо, что все изучаемые представления являются конечномерными. Из обоих результатов, полученных в этой главе, для нашего случая вытекают следствия:

1° Все аналитические неприводимые представления группы \mathfrak{G}_0 конечномерны (и однозначны).

2° Для описания всех неприводимых представлений группы G_0 достаточно перечислить все аналитические неприводимые представления группы \mathfrak{G}_0 .

Мы займемся решением последней задачи. В этом параграфе будет дано лишь предварительное исследование инфинитезимальной структуры представления. Мы убедимся, что инфинитезимальный метод приводит в данном случае к значительным трудностям*). Полное решение задачи будет получено в следующей главе совершенно иначе (глобальным) путем. Тем не менее инфинитезимальная трактовка является чрезвычайно наглядной, и это побуждает нас изложить ее достаточно подробно.

Положим $X = \mathrm{gl}(n, \mathbf{C})$, $X_0 = \mathrm{sl}(n, \mathbf{C})$. Напомним, что X состоит из всех комплексных матриц $n \times n$ и

*) См., однако, общий результат в § 121.

подалгебра X_0 выделяется условием $\text{sp } x = 0$. Элементы

$$e_{ij} = i \begin{vmatrix} & j \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix}$$

образуют базис в алгебре X , элементы e_{ij} , $i \neq j$, $h_i = e_{ii} - e_{i+1, i+1}$ образуют базис в подалгебре X_0 . Поскольку $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, то мы имеем следующие соотношения коммутации:

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}.$$

Мы представим эти соотношения значительно более наглядно, если выделим отдельно элементы e_{ij} , для которых $i > j$, $i = j$, $i < j$. Получаемые системы элементов обозначим символами \underline{e}_- , \underline{e}_0 , \underline{e}_+ .

Пусть X_- , H , X_+ — линейные оболочки базисных векторов из \underline{e}_- , \underline{e}_0 , \underline{e}_+ соответственно. Как нетрудно видеть, для элементов системы \underline{e}_+ единственными нетривиальными соотношениями коммутации являются соотношения

$$[e_{ij}, e_{jk}] = e_{ik}, \quad i < j < k.$$

Отсюда, в частности, следует, что X_+ является подалгеброй. Точно так же X_- является подалгеброй. Множество H является абелевой подалгеброй. Полагая $h = t^i e_{ii}$, мы имеем также

$$[h, e_{ij}] = (t^i - t^j) e_{ij}.$$

Это означает, что каждый вектор e_{ij} является собственным относительно линейного оператора $D_h x = [h, x]$. Собственные значения $\alpha_{ij} = t^i - t^j$ мы условимся называть корнями алгебры X . Все сказанное остается в силе также и для алгебры X_0 , если положим $t^1 + t^2 + \dots + t^n = 0$.

Перейдем к изучению аналитических (конечномерных) представлений группы $\mathfrak{G} = \text{GL}(n, \mathbf{C})$ и ее подгруппы $\mathfrak{G}_0 = \text{SL}(n, \mathbf{C})$. Пусть T_g — такое представление и

$D(x)$ — его дифференциал. Положим

$$E_{ij} = D(e_{ij}).$$

В частности, операторы $E_i = E_{ii}$ и их линейные комбинации являются инфинитезимальными операторами диагональной подгруппы в $\mathfrak{S}(\mathfrak{G}_0)$. Используя принцип аналитического продолжения, легко получаем отсюда:

I. *Операторы E_i и их линейные комбинации одновременно диагонализуются в пространстве представления.*

Действительно, пусть V — пространство представления. Пространство V вполне приводимо относительно подгруппы Γ всех диагональных унитарных матриц, и каждое неприводимое подпространство одномерно *). Производя аналитическое продолжение, получаем то же утверждение для подгруппы D всех диагональных матриц из $\mathfrak{S}(\mathfrak{G}_0)$. Но тогда то же верно и для инфинитезимальных операторов этой подгруппы. Наше утверждение доказано.

II. *Собственное значение оператора $D(h) = t^i E_i$ является линейной формой на алгебре H : $\lambda(h) = t^i \lambda_i$.*

Доказательство очевидно ($D(x)$ линейно зависит от x). Каждое собственное значение $\lambda(h)$ называется *весом* представления $D(x)$. Иногда, если это не будет вызывать недоразумений, мы будем называть *весом* набор коэффициентов λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Вектор $\xi \in V$, собственный относительно всех операторов $D(h)$, называется также *весовым*.

III. *Если вектор ξ является весовым с собственным значением λ , то вектор $\xi_{ij} = E_{ij}\xi$ также является весовым с собственным значением $\lambda_{ij} = \lambda + \alpha_{ij}$ (где α_{ij} — соответствующий корень).*

Доказательство проводится так же, как и в случае группы $SU(2)$. Замечая, что $D(h)E_{ij} = E_{ij}(D(h) + \alpha_{ij})$, получаем $D(h)\xi_{ij} = (\lambda(h) + \alpha_{ij}(h))\xi_{ij}$. Заметим, что если рассматривать α_{ij} как вектор коэффициентов формы $\alpha_{ij}(h)$, то мы имеем

$$\alpha_{ij} = e_i - e_j,$$

*) Попросту говоря, коммутативное семейство унитарных матриц диагонализуется.

где e_i означает i -й базисный вектор в n -мерном векторном пространстве H . При этом мы имеем $\alpha_{ij}(h) = (\alpha_{ij}, h)$, где в правой части имеется в виду обычное скалярное произведение в пространстве H : $(\lambda, h) = \lambda_i t^i = \lambda(h)$ *). Мы получаем значительную информацию о спектре представления $D(h)$.

IV. Пусть s — произвольная матрица подстановки в группе \mathfrak{S} . Если вектор ξ является весовым с собственным значением λ , то вектор $\xi_s = T_s \xi$ также является весовым с собственным значением $\lambda_s = s\lambda$.

Действительно, если s — подстановка, то $sh = \tilde{h}s$ для всякой диагональной матрицы h , где \tilde{h} означает также диагональную матрицу с переставленными собственными значениями. Следовательно, также $SD(h) = D(\tilde{h})S$, где положено $S = T_s$. Применяя это соотношение, легко получаем нужное утверждение. Заметим, что оператор S (в отличие от E_{ij}) всегда является обратимым, и отсюда вытекает, что собственные значения λ , λ_s всегда имеют одинаковую кратность. Действительно, отображение S сохраняет размерность подпространства собственных векторов с фиксированным собственным значением.

С учетом замечания о кратностях сформулируем полученный результат в несколько иной форме. Заметим, что множество всех подстановок образует конечную подгруппу \mathfrak{S} в группе \mathfrak{S} (симметрическую группу порядка $n!$). Эта группа будет называться *группой Вейля*. С другой стороны, пусть Λ — множество всех весов представления $D(x)$ с соответствующими кратностями, т. е. график функции n_λ , где n_λ — кратность веса λ . Нами доказано следующее утверждение:

V. Весовая диаграмма Λ инвариантна относительно группы Вейля.

Следующий важный шаг состоит во введении лексикографической упорядоченности в множество весов. Заметим вначале, что всякий вес $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ имеет вещественные координаты. Действительно, если h содержится в алгебре Ли унитарной подгруппы Γ , то ко-

*) Строго говоря, мы должны рассматривать λ как элемент дуального пространства \widehat{H} (составленного из линейных форм). Однако введение скалярного произведения отождествляет H и \widehat{H} .

ординаты t^i в разложении $h = t^i e_{ii}$ должны быть чисто мнимыми и показатели λ_i в экспоненте $\exp \lambda(h) = \exp \lambda_i t^i$ должны быть вещественными *). Для каждой пары вещественных векторов λ, μ полагаем $\lambda > \mu$, если либо $\lambda_1 > \mu_1$, либо $\lambda_1 = \mu_1$, но $\lambda_2 > \mu_2$ и т. д. Конечное множество весов в диаграмме Λ становится при этом вполне упорядоченным.

Заметим, что корни $\alpha_{ij} = e_i - e_j$ также имеют вещественные координаты в базисе $\{e_i\}$. Используя для этих корней понятие лексикографической упорядоченности, получаем следующий результат:

$$\alpha_{ij} < 0 \text{ при } i > j, \quad \alpha_{ij} > 0 \text{ при } i < j.$$

Кроме того, $\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$. Таким образом, разбиение корней на отрицательные, нулевые и положительные соответствует разбиению базиса $\{e_{ij}\}$ на подсистемы e_- , e_0 , e_+ . Соответственно мы видим, что

$$\lambda_{ij} < \lambda \text{ при } i > j, \quad \lambda_{ij} > \lambda \text{ при } i < j.$$

Здесь $\lambda_{ij} = \lambda + \alpha_{ij}$ — собственное значение весового вектора $\xi_{ij} = E_{ij}\xi$. Оператор E_{ij} мы будем теперь называть *понижающим*, если $i > j$, и *повышающим*, если $i < j$.

VI. Пусть $\alpha = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ — максимальный из весов в диаграмме Λ . Тогда $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$. Соответствующий вектор ξ обращается в нуль всеми повышающими операторами E_{ij} .

Действительно, если бы вектор α не обладал указанным свойством упорядоченности, то, применяя преобразования группы Вейля, мы получили бы вес $s\alpha$, удовлетворяющий этим свойствам. При этом $n_{s\alpha} = n_\alpha \neq 0$ и $s\alpha > \alpha$, что противоречило бы условию максимальности веса α . Очевидно, также, что $E_{ij}\xi = 0$, $i < j$, так как повышение веса невозможно.

Полученный результат делает естественным следующее определение. Если $D(x)$ неприводимо, то скажем, что α является *старшим весом* и соответствующий

*) И даже целыми в случае $GL(n)$. В случае $SL(n)$ параметры λ_i определяются с точностью до общего слагаемого (поскольку $\sum t^i = 0$); однако и в этом случае мы можем условиться считать, что λ_i целые.

вектор ξ — старшим вектором этого представления. В силу правила цикличности все пространство V является циклической оболочкой вектора ξ относительно полиномов от операторов E_{ij} . Из соотношений коммутации ясно также, что достаточно рассматривать полиномы от *понижающих* операторов E_{ij} (поскольку повышающие операторы аннулируют ξ). С помощью таких операторов можно построить базис в пространстве V ; однако эта задача имеет нетривиальное решение.

В дальнейшем мы увидим, что старший вектор в неприводимом представлении определяется однозначно с точностью до множителя и старший вес α характеризует это представление с точностью до эквивалентности.

§ 45. Модель неприводимых представлений $SU(3)$

В этом параграфе будет рассмотрена простая модель неприводимого представления группы $SU(n)$, которая при $n = 3$ содержит все неприводимые представления этой группы (определенные с точностью до эквивалентности).

Пусть E — n -мерное пространство и Φ_q^p — пространство тензоров над E , q раз ковариантных и p раз контравариантных, т. е. тензоров вида $t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$. По аналогии со случаем $SU(2)$ мы можем ограничиться рассмотрением тензоров, симметричных по i_1, i_2, \dots, i_q и симметричных по j_1, j_2, \dots, j_q . В этом случае вместо тензоров можно рассматривать полиномы

$$f(x, \xi) = t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p} \xi^{j_1} \xi^{j_2} \dots \xi^{j_q},$$

где $x = (x_i)$ — ковариантная строка и $\xi = (\xi^j)$ — контравариантный столбец. Очевидно, пространство этих тензоров все еще приводимо. Действительно, свертка по любой паре индексов i_k, j_l перестановочна с преобразованиями в классе тензоров. В частности, тензоры, для которых эта свертка дает нулевой результат, инвариантны относительно любой аффинной группы G .

Пусть R_q^p — пространство тензоров из Φ_q^p , симметричных отдельно по нижним, отдельно по верхним индек-