вектор ξ — *старшим вектором* этого представления. В силу правила цикличности все пространство V является циклической оболочкой вектора ξ относительно полиномов от операторов E_{ij}. Из соотношений коммутации ясно также, что достаточно рассматривать полиномы от *понижающих* операторов E_{ij} (поскольку повышающие операторы аннулируют ξ). С помощью таких операторов можно построить базис в пространстве V; однако эта задача имеет нетривиальное решение.

В дальнейшем мы увидим, что старший вектор в неприводимом представлении определяется однозначно с точностью до множителя и старший вес α характеризует это представление с точностью до эквивалентности.

§ 45. Модель неприводимых представлений SU(3)

В этом параграфе будет рассмотрена простая модель неприводимого представления группы $SU(n)$, которая при $n = 3$ содержит все неприводимые представления этой группы (определяемые с точностью до эквивалентности).

Пусть E — n-мерное пространство и Φ_q^p — пространство тензоров над E, q раз ковариантных и p раз контравариантных, т. е. тензоров вида $t_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{i_1 i_2 \ldots i_p}$. По аналогии со случаем SU(2) мы можем ограничиться рассмотрением тензоров, симметричных по $i_1, i_2, \ldots, i_q$ и симметричных по $j_1, j_2, \ldots, j_q$. В этом случае вместо тензоров можно рассматривать полиномы

$$f(x, \xi) = t_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} \xi^{j_1} \xi^{j_2} \ldots \xi^{j_q},$$

где $x = (x_i)$ — ковариантная строка и $\xi = (\xi^j)$ — контравариантный столбец. Очевидно, пространство этих тензоров все еще приводимо. Действительно, свертка по любой паре индексов i_k, j_l перестановочна с преобразованиями в классе тензоров. В частности, тензоры, для которых эта свертка дает нулевой результат, инвариантны относительно любой аффинной группы G.

Пусть R_q^p — пространство тензоров из Φ_q^p, симметричных отдельно по нижним, отдельно по верхним индек-

сам и таких, что свертка по индексам i_1, j_1 обращается в нуль. В силу условия симметричности свертка по любой паре индексов i_k, j_l при этом также обращается в нуль. Пусть d_{pq} — представление группы $G = \mathrm{GL}(n)$ в этом классе тензоров. Покажем, что d_{pq} неприводимо.

1. Найдем все элементы $\omega \in R_q^p$, которые аннулируются повышающими операторами. Заметим, что в классе полиномов $f(x, \xi)$ преобразования группы G задаются следующей формулой *):

$$T_g f(x, \xi) = f(xg, g^{-1}\xi).$$

Вместо повышающих операторов E_{ij} мы можем рассматривать соответствующие однопараметрические подгруппы:

$$x_j \to x_j + tx_i, \quad \xi_i \to \xi_i - t\xi_j, \qquad i < j.$$

(здесь имеется в виду, что все остальные координаты x_k, $k \neq j$, ξ_k, $k \neq i$, остаются неизменными.) Если ω аннулируется операторами E_{ij}, $i < j$, то ω является инвариантом относительно этих подгрупп. Полагая, в частности, $i = 1$, $j = 2, 3, \ldots, n$, подбираем параметры каждой из этих подгрупп из условия $x_j + tx_1 = 0$. Это возможно сделать при $x_1 \neq 0$. Поскольку ω вполне определяется своими значениями при $x_1 \neq 0$, то мы находим из условия инвариантности

$$\omega(x, \xi) = \omega((x_1, 0, 0, \ldots, 0); \tilde{\xi}),$$

где $\tilde{\xi}$ отличается от ξ только первой координатой (которая может быть найдена из условия инвариантности свертки $x\xi$). Полагая, далее, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = n$, мы добиваемся аналогично обращения в нуль всех координат вектора ξ, кроме последней координаты ξ_n; при этом, как легко видеть, все координаты первого вектора $(x_1, 0, 0, \ldots, 0)$ остаются неизменными, за исключением последней. В результате имеем

$$\omega(x, \xi) = \omega((x_1, 0, 0, \ldots, 0, \tau); (0, 0, \ldots, 0, \xi_n)),$$

---

*) См. § 14 (стр. 73).

Значение τ определяется из условия инвариантности свертки $x\xi$. Следовательно, $\omega(x, \xi)$ является полиномом от x_1, ξ_n и $\tau = x\xi/\xi_n$. Поскольку в то же время ω является полиномом от x и ξ, то ясно, что ω является полиномом от x_1, ξ_n и $\sigma = x\xi$. В результате

$$\omega(x, \xi) = P(x_1, \xi_n, \sigma),$$

где P — полином.

2. До сих пор мы не использовали равенство нулю всех сверток в пространстве R_q^p. Заметим, что взятие свертки равносильно, с точностью до множителя, применению дифференциального оператора

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^i} \quad \text{(свертка по } i\text{)}.$$

Таким образом, $\Delta f = 0$ для всех элементов $f \in R_q^p$. Нетрудно проверить, что из всех полиномов от x_1, ξ_n, σ этому условию удовлетворяют только те полиномы, которые не зависят от σ. Среди таких полиномов пространству R_q^p принадлежит лишь единственный (с точностью до множителя) одночлен

$$\omega = x_1^p \xi_n^q.$$

3. Используем теперь принцип полной приводимости. Как мы видели в § 44, каждое неприводимое представление группы G обладает старшим вектором. Если бы представление в R_q^p было приводимо, то решение ω определялось бы неоднозначно. Следовательно, d_{pq} неприводимо.

Замечание 1. Если использовать координаты

$$u_k = \frac{1}{2}(x_k + \xi^k), \quad v_k = \frac{1}{2i}(x_k - \xi^k)$$

то свертка $x\xi$ записывается в виде суммы квадратов этих (комплексных) координат. Соответственно оператор Δ, введенный выше, отождествляется с оператором Лапласа в комплексном евклидовом пространстве размерности $2n$. Следовательно, R_q^p *отождествляется с пространством гармонических полиномов степени однородности p по x, степени однородности q по ξ.*

Замечание 2. Можно показать, что все полиномы $f \in R_q^p$ однозначно определяются своими значениями на конусе K: $x\xi = 0$. Действительно, если $f = 0$ на K, то, заменяя векторы x, ξ линейными комбинациями вида $\lambda' x' + \lambda'' x'' + \ldots$, $\mu'\xi' + \mu''\xi'' + \ldots$ и варьируя коэффициенты λ, μ, получаем, что полилинейная форма с коэффициентами $t_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ обращается в нуль на всяком наборе векторов x', x'', $\ldots$, ξ', ξ'', $\ldots$, попарные свертки между которыми равны нулю. Фиксируя все переменные, кроме $x = x'$, $\xi = \xi'$, приходим к рассмотрению формы второго порядка:

$$\varphi(x, \xi) = \tau_j^i x_i \xi^j,$$

для коэффициентов которой выполняется условие $\tau_i^i = 0$ (свертка по i). Приравнивая нулю дифференциал этой формы и пользуясь условием $dx_i \xi^i + x_i\, d\xi^i = 0$, легко находим, что $\tau_j^i = 0$ при $i \neq j$ и $\tau_i^i = \mathrm{const}$ (не зависит от i). Согласно условию о свертке*) находим, что $\tau_i^i = 0$ при каждом i. Следовательно, $\tau_j^i = 0$. Применяя то же рассуждение к форме τ_j^i по переменным $x = x''$, $\xi = \xi''$ и продолжая этот процесс, получаем после конечного числа шагов равенство $t_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{i_1 i_2 \ldots i_p} = 0$.

Следовательно, d_{pq} *может быть реализовано в классе полиномов на конусе* K. Это утверждение можно также получить как тривиальное следствие результатов следующей главы.

Замечание 3. В приведенном выше построении старший вектор $\omega = x_1^p \xi_n^q$ представления d_{pq} был найден явно. Для определения старшего веса введем диагональную матрицу $\delta = \mathrm{diag}\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$ и найдем собственное значение $\lambda(\delta)$ из условия $T_\delta \omega = \lambda(\delta)\omega$. Поскольку $x_i \to x_i \delta_i$, $\xi_i \to \delta_i^{-1} \xi_i$, то мы имеем

$$\lambda(\delta) = \delta_1^p \delta_n^{-q}.$$

Полагая теперь $\delta_i = e^{t_i}$ и вычисляя производные по t_i при $t_i = 0$, получаем искомый старший вес:

$$\lambda = (p, 0, 0, \ldots, 0, -q).$$

Если рассматривать только подгруппу $\mathrm{SL}(n)$, то из

---

*) См. определение пространства R_q^p на стр. 196.

условия $\det g = 1$ следует, что всякие два веса $\lambda, \lambda + \varepsilon$, $\varepsilon = (1, 1, \ldots, 1)$, можно отождествить (они определяют одно и то же собственное значение $\lambda(\delta)$). В частности, при $n = 3$ вместо веса λ можно рассматривать вес

$$\alpha = (m_1, m_2, m_3), \qquad m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3,$$

где положено $m_1 = p + k$, $m_2 = k$, $m_3 = k - q$ с произвольным слагаемым k. Следовательно, при $n = 3$ в нашей конструкции встречается произвольный старший вес относительно подгруппы $SL(3)$. Отсюда естественно

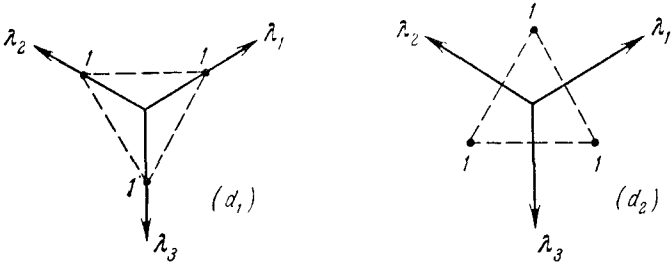

Рис. 1.

предположить, что данная конструкция содержит все неприводимые представления $SL(3)$. Действительно, это будет следовать из результатов следующей главы.

В силу принципа аналитического продолжения то же верно для подгруппы $SU(3)$.

В заключение рассмотрим несколько более подробно простейшие представления d_{10}, d_{01}, d_{11}. Первые два из этих представлений трехмерны, последнее восьмимерно. Построим весовые диаграммы этих представлений. Условимся рассматривать только подгруппу $SL(3)$ (или $SU(3)$). Тогда всякий вес $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ определяется, как мы видели выше, с точностью до общего слагаемого у координат λ_1, λ_2, λ_3. Нормализуем этот вес условием $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ и будем на этой плоскости рассматривать ортогональную проекцию трехмерной системы координат. Тогда для представлений $d_1 = d_{10}$, $d_2 = d_{01}$ получаем графики, изображенные на рис. 1.

Действительно, в случае d_1 пространство R_0^1 натянуто на базисные векторы x_1, x_2, x_3, которым отвечают веса $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ изображенные на первой диаграмме. Точно так же в случае d_2 пространство R_1^0 натянуто на базисные векторы ξ^1, ξ^2, ξ^3 с весами $(0, 0, -1)$, $(0, -1, 0)$, $(-1, 0, 0)$. Единицы, стоящие у точек весовой диаграммы, означают, что каждый вес содержится в данном случае с кратностью 1. Точно так же для представления d_{11} получаем следующий график (рис. 2):

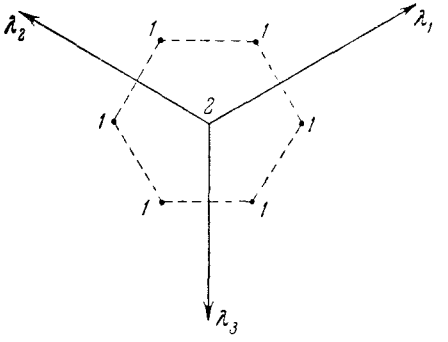

Рис. 2.

Система весов в этом случае имеет вид $(2, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$ $(0, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 0, 2)$, $(2, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$. Последний вес содержится двукратно. Система весов распадается на две орбиты относительно группы Вейля.

Представления d_1, d_2 могут быть охарактеризованы с геометрической точки зрения как преобразования *вектора* и *бивектора* над трехмерным пространством E («кварк» и «антикварк» в терминологии физиков). Представление d_{11} («октет») будет в дальнейшем охарактеризовано как «присоединенное представление» $SL(3)$.

Как уже было сказано во введении к этой главе, принцип аналитического продолжения в теорию представлений был впервые введен Г. Вейлем. Этот принцип позволил использовать для надкомпактных групп богатую информацию, даваемую глобальной теоремой.

В дальнейшем мы покажем, что комплексные группы допускают независимое изучение благодаря простой алгебраической структуре. (Можно было бы провести эту точку зрения последовательно, но мы не ставили подобной цели в этой книге). Следовательно, принцип аналитического продолжения можно использовать «в обратную сторону» — для получения информации о структуре представлений компактной группы.

Примеры, приведенные в этой главе (представления $SU(n)$, $SL(n)$), следует рассматривать как иллюстративные. В них принцип аналитического продолжения комбинируется с инфинитезимальным методом. В дальнейшем, как уже было сказано, мы предпочтем глобальный метод; однако инфинитезимальную конструкцию желательно все время иметь в виду вследствие ее наглядности.