

## ГЛАВА VII

# НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $U(n)$

В этой главе будет получено полное описание неприводимых представлений группы  $U(n)$ . Следуя идее аналитического продолжения, мы рассматриваем эти представления аналитически продолженными на  $GL(n)$ . Тем самым возникает также полное описание неприводимых аналитических представлений  $GL(n)$ . Полагая  $\det g = 1$ , получаем те же результаты для  $SU(n)$ ,  $SL(n)$ . В действительности метод, применяемый при решении этой задачи, позволяет столь же просто получить описание и всех *вещественных* (конечномерных) неприводимых представлений комплексной группы ( $SL(n)$ ,  $GL(n)$ ). В дальнейшем условие конечномерности специально не оговаривается.

Глобальный метод решения, предлагаемый в этой главе, совершенно не зависит от всей предыдущей теории. Иногда мы пользуемся инфинитезимальными построениями, но это делается лишь из соображений наглядности. Что же касается теории компактных групп Ли (глобальная теорема), то мы лишь однажды — при описании пространства представления — пользуемся принципом полной приводимости. В действительности этот принцип может быть непосредственно доказан для комплексной группы  $SL(n)$  (при помощи инфинитезимального метода).

Таким образом, теория конечномерных представлений комплексной группы может быть построена независимо от теории компактных групп Ли. Мы будем использовать лишь элементарные методы линейной алгебры («разложение Гаусса», описанное в § 9).

## § 46. Существование старшего веса

Положим  $G = SL(n, \mathbf{C})$ . Элементы группы  $G$  предполагаются записанными в виде матриц относительно фиксированного базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Упорядоченность этого

базиса позволяет выделить в группе  $G$  специальные подгруппы, входящие в разложение Гаусса:

$$G_{\text{reg}} = Z_- D Z_+.$$

Здесь  $Z_-$ ,  $D$  и  $Z_+$  — подгруппы в группе  $G$ , составленные соответственно из всех нижних треугольных с единицами на диагонали, диагональных и верхних треугольных с единицами на диагонали матриц  $g \in G$ . Множество  $G_{\text{reg}}$  состоит из всех произведений

$$g = \zeta \delta z, \quad \zeta \in Z_-, \quad \delta \in D, \quad z \in Z_+.$$

Как известно из линейной алгебры (см. § 9), множество  $G_{\text{reg}}$  всюду плотно в  $G$ . Если  $\Delta_p$  — главный диагональный минор, составленный из первых  $p$  строк и первых  $p$  столбцов матрицы  $g$ , то  $g \in G_{\text{reg}}$  тогда и только тогда, когда  $\Delta_p \neq 0$ ,  $p = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть  $g \rightarrow T_g$  — представление группы  $G$  в векторном пространстве  $V$ . Вектор  $\xi \in V$  мы называем *весовым*, если он является собственным относительно всех преобразований подгруппы  $D$ :

$$T_\delta \xi = \mu(\delta) \xi.$$

Собственное значение  $\mu(\delta)$  называем *весом* (относительно подгруппы  $D$ ). Очевидно,  $\mu(\delta)$  является одномерным представлением («характером») группы  $D$ . Если представление  $T_g$  аналитично, то  $\mu(\delta) = \delta_1^{m_1} \delta_2^{m_2} \dots \delta_n^{m_n}$ , где  $\delta_i$  — собственные значения матрицы  $\delta \in D$ .

**Определение 1.** Вектор  $\xi$  мы называем *старшим вектором* представления  $T_g$ , если он является инвариантом группы  $Z = Z_+$  и весовым относительно  $D$ .

Заметим, что группа  $G$  является односвязной; следовательно, все ее представления однозначны. Из условия однозначности следует, в частности, что показатели  $m_1, m_2, \dots, m_n$  всякого веса  $\mu(\delta)$  являются целыми \*). Вектор  $\mu = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  мы будем называть *инфinitезимальным весом* представления  $T_g$ . Вес  $\alpha(\delta)$ , отвечающий старшему вектору, будет называться *старшим*

\* ) См. сноска на стр. 195.

*весом.* Если в определении 1 рассматривать  $Z_-$  вместо  $Z_+$ , то аналогично вводятся понятия *младшего вектора* и *младшего веса*.

Заметим также, что  $Z$  является связной (и односвязной) подгруппой, алгеброй Ли для которой является подалгебра  $X_+$ , введенная в § 44. Следовательно, старший вектор  $\xi$  удовлетворяет системе уравнений

$$E_{ij}\xi = 0, \quad i < j.$$

Как мы видели в § 44, всякое аналитическое представление группы  $G$  обладает таким вектором. Однако при этом мы пользовались «унитарным трюком» Вейля (диагонализация операторов подгруппы  $D$ ). Здесь будет предложено иное независимое доказательство, которое пригодно также и для вещественных представлений группы  $G$ .

**Теорема 1.** *Всякое (конечномерное) представление группы  $G = \mathrm{SL}(n, C)$  (или  $G = \mathrm{GL}(n, C)$ ) обладает хотя бы одним (ненулевым) старшим вектором.*

**Доказательство.** Положим  $T = DZ$ . Группа  $T$  состоит из всех треугольных невырожденных матриц  $t \in \mathrm{GL}(n, C)$ . Нижеследующая лемма является частным случаем одной общей теоремы, принадлежащей Софусу Ли. Эта лемма допускает глобальное доказательство (§ 88), однако из соображений наглядности мы докажем ее инфинитезимальным способом.

**Лемма.** *Всякое неприводимое представление группы  $T$  в комплексном векторном пространстве одномерно.*

**Доказательство леммы.** Вместо группы  $T$  будем рассматривать ее алгебру Ли  $L = H + X_+$ , где  $H$  натянуто на диагональные матрицы  $e_{ii}$  и  $X_+$  натянуто на верхние треугольные матрицы  $e_{ij}$ ,  $i < j$ . Пусть  $D(x)$  — неприводимое представление алгебры  $L$  в пространстве  $V$  и  $E_{ij} = D(e_{ij})$ ,  $i < j$ .

Пусть  $V_0$  — подпространство, неприводимое относительно  $X_+$ . Заметим, что оператор  $E_{1n}$  перестановочен со всеми операциями  $X_+$ . Следовательно, согласно лемме Шура  $E_{1n}$  кратно единице на  $V_0$ :  $E_{1n} = \lambda I$ . Из соотношения  $[E_{12}, E_{2n}] = E_{1n}$  при  $n > 2$  заключаем, что  $\lambda = 0$ . Действительно, след коммутатора равен нулю. Заменяя оператор  $E_{1n}$  нулем, замечаем, что теперь оператор  $E_{1, n-1}$  перестановчен со всеми операциями алгебры  $X_+$ . Если  $n - 1 > 2$ , то, рассуждая, как и выше, получаем, что  $E_{1, n-1} = 0$ . Продолжая это построение, заключаем, что все операторы  $E_{1k}$ ,  $k > 2$ , обращаются в

нуль на  $V_0$  и оператор  $E_{12}$  кратен единичному. Точно так же поступаем с элементами  $E_{2k}$ ,  $k \geq 3$ ,  $E_{3k}$ ,  $k \geq 4$ , и т. д. В результате получаем, что операторы  $D_i = E_{i, i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , являются скалярами на  $V_0$  и все остальные операторы  $E_{ij}$ ,  $j - i > 1$ , обращаются в нуль на  $V_0$ . Поскольку скаляры  $D_i = \lambda_i I$  взаимно перестановочны, то отсюда заключаем, что  $V_0$  одномерно. Мы доказали аналог нашей леммы для подалгебры  $X_+$ .

Далее, вернемся ко всему пространству  $V$ . Пусть  $e_1$  — собственный вектор относительно  $X_+$  с собственным значением  $\lambda = \lambda(x)$ ,  $x \in X_+$ . Согласно сказанному выше такие векторы всегда существуют (и  $\lambda = \lambda(x)$ , очевидно, является линейной формой над  $X_+$ ). Цепочку векторов  $e_1, e_2, \dots, e_m$  назовем *присоединенной* к вектору  $e_1$ , если

$$D(x)e_k \equiv \lambda(x)e_k \pmod{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}},$$

т. е. если применение  $D(x)$  к вектору  $e_k$  сводится к умножению на  $\lambda(x)$  с точностью до некоторой линейной комбинации предшествующих векторов  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ . Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_m$  — максимальная присоединенная цепочка и  $V_1$  — линейная оболочка векторов  $e_1, e_2, \dots, e_m$ . Очевидно,  $V_1$  инвариантна относительно  $X_+$ . Несложная проверка убеждает нас в том, что  $V_1$  инвариантна также относительно всей алгебры  $L$ . Следовательно,  $V = V_1$  ввиду неприводимости  $V$ .

Заметим теперь, что всякий оператор  $E_{ij}$ ,  $i < j$ , может быть записан в виде коммутатора  $[E_{ii}, E_{ij}]$ . Поскольку след коммутатора равен нулю и след  $E_{ij}$  пропорционален  $\lambda(e_{ij})$  с ненулевым коэффициентом пропорциональности ( $=\dim V$ ), то  $\lambda(e_{ij}) = 0$  для всех значений  $i < j$ . Следовательно,  $\lambda(x) = 0$  на подалгебре  $X_+$ . Наконец, операторы  $A_i = D(e_{ii})$  перестановочны между собой, и согласно лемме Шура пространство  $V$  одномерно. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть вектор  $\xi$  определяет направление, неприводимо инвариантное относительно подгруппы  $T$ . Тогда, как мы видели при доказательстве леммы,  $E_{ij}\xi = 0$ ,  $i < j$ . Кроме того, вектор  $\xi$  является собственным относительно всей подгруппы  $T$  и, в частности, относительно подгруппы  $D$ . Следовательно,  $T_z\xi = \xi$ ,  $z \in Z$ ,  $T_\delta\xi = \mu(\delta)\xi$ ,  $\delta \in D$ .

Теорема доказана.

**Замечание.** При доказательстве теоремы 1 мы получили также значительную информацию относительно представлений треугольной группы  $T$ . Мы видим, что всякое неприводимое представление этой группы одномерно. Следовательно, в пространстве всякого представления содержится вектор, собственный относительно всей группы  $T$ . Следовательно, также всякое представление группы  $T$  приводится в некотором базисе к треуголь-

ному виду. Последнее утверждение легко доказывается обычным методом индукции \*).

Следовательно, свойство треугольности восстанавливается в каждом (конечномерном, комплексном) представлении группы  $T$ .

### § 47. Единственность старшего вектора

Покажем теперь, что из теоремы 1 вытекает чрезвычайно простое построение для каждого неприводимого представления группы  $G$ .

Пусть  $g \rightarrow T_g$  — неприводимое представление группы  $G$  в комплексном векторном пространстве  $V$ , и пусть  $\hat{V}$  — дуальное пространство, т. е. множество всех линейных форм над  $V$ . Фиксируя линейную форму  $l$ , мы можем каждому вектору  $x \in V$  поставить в соответствие функцию

$$f(g) = l(T_g x), \quad g \in G.$$

Таким путем, как мы видели в § 18, получается вложение  $T_g$  в правое регулярное представление группы  $G$ . Действительно, пусть  $\mathfrak{F}$  — множество всех полученных функций и  $V_0$  — множество всех векторов  $x \in V$ , для которых  $f(g) = 0$ . Очевидно,  $V_0$  инвариантно относительно  $T_g$  и  $V_0 \neq V$ , откуда  $V_0 = (0)$ . Следовательно,  $\mathfrak{F}$  изоморфно пространству  $V$ . Заменяя  $x$  на  $y = T_{g_0}x$ , получаем новую функцию

$$R_{g_0}f(g) = f(gg_0).$$

Следовательно, представление  $T_g$  эквивалентно представлению  $R_g$  в классе  $\mathfrak{F}$ . При этом в нашем распоряжении имеется выбор линейной формы  $l$ .

Используя теорему 1, выберем вектор  $x_0$ , который является *старшим* в пространстве  $V$ . Используя

\* ) Действительно, наличие собственного вектора означает квазитреугольность представления  $T_g$  с одномерным диагональным блоком и блоком  $T'_{g_0}$ , размерность которого на единицу меньше размерности представления. Рассуждая индуктивно, можем считать, что  $T'_{g_0}$  треугольно, но тогда и  $T_g$  также треугольно.