говоря, лишь для конечнозначных аналитических представлений группы $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$*). Во всяком случае, следствия 1 и 2 справедливы для вполне приводимых представлений этой группы.

§ 48. Различные модели $d(\alpha)$

Прежде чем завершить классификацию всех неприводимых представлений группы G, остановимся на вопросе о различных функциональных реализациях неприводимого представления.

1. Реализация на группе Z. Поскольку все функции из пространства $\mathfrak{R}_\alpha$ удовлетворяют соотношениям

$$f(\zeta\delta z) = \alpha(\delta) f(z),$$

то они вполне определяются своими значениями на Z. Действительно, зная $f(z)$, мы знаем значения $f(g)$ на множестве G_{reg}, но тогда по непрерывности также и на всей группе G. Заменим $f(g)$ на $\tilde{f}(g) = f(gg_0)$; тогда мы имеем

$$\tilde{f}(z) = f(zg_0) = f(\xi\,\tilde{\delta}\tilde{z}) = \alpha(\tilde{\delta}) f(\tilde{z}),$$

где элементы $\tilde{\delta}$, $\tilde{z}$ определяются из разложения $zg_0 = \xi\tilde{\delta}\tilde{z}$. Положим $\alpha(\tilde{\delta}) = \alpha(z, g_0)$ и $\tilde{z} = z_{g_0}$. Заметим, что $\alpha(z, g_0)$ совпадает со значением «производящей функции» $\alpha(g)$ на элементе zg_0. В результате получаем следующее преобразование в классе функций $f(z)$:

$$T_g f(z) = \alpha(z, g) f(z_g).$$

При $n = 2$ получаем, как легко проверить, известную нам реализацию с помощью дробно-линейной подстановки. Таким образом, преобразование $z \to z_g$ является обобщением такой подстановки. Полученную нами модель условимся называть *реализацией на группе Z*.

Мультипликативное свойство операторов представления равносильно следующим тождествам (которые так-

*) Более подробно об условиях полной приводимости для $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$ см. конец § 61. Более общее утверждение см. также в § 118.

же легко проверить и непосредственно):

$$z_{g_1 g_2} = (z_{g_1})_{g_2},$$

$$\alpha(z, g_1 g_2) = \alpha(z, g_1) \cdot \alpha(z_{g_1}, g_2).$$

При этом очевидно также, что $z_e = z$ и $\alpha(z, e) = 1$. Кроме того, $\alpha(z, z_0) = 1$ для любого $z_0 \in Z$ и $\alpha(z, \delta) = \alpha(\delta)$ для любого $\delta \in D$. Следовательно, мы получаем чрезвычайно простые формулы:

$$T_{z_0} f(z) = f(z z_0), \quad T_\delta f(z) = \alpha(\delta) f(\delta^{-1} z \delta).$$

Действительно, $z_{z_0} = z z_0$ и $z_\delta = \delta^{-1} z \delta$. Этими формулами мы часто будем пользоваться в дальнейшем. Однако при $g \in Z_-$ функция $\alpha(z, g)$ выглядит уже довольно сложно.

Всякий старший вектор $f_0(z)$ должен удовлетворять условию $f_0(z z_0) = f_0(z)$, z, $z_0 \in Z$. Отсюда $f_0(z) = \text{const}$, и мы еще раз получаем единственность старшего вектора. Кроме того, мы видим, что роль старшего вектора в реализации на группе Z играет функция $f_0(z) \equiv 1$.

2. Реализация на группе T. Вместо предыдущих построений мы могли бы использовать разложение $g = \zeta t$, $\zeta \in Z_-$, $t \in T$, и заметить, что всякая функция $f \in \mathfrak{R}_\alpha$ вполне определяется своими значениями на T. В результате получаем оператор

$$R_g f(t) = f(t_g),$$

где точка t_g определяется из разложения Гаусса $tg = \zeta t_g$, $\zeta \in Z_-$, $t_g \in T$. При этом функции из пространства представления удовлетворяют условию $f(\delta t) = \alpha(\delta) f(t)$. Роль старшего вектора играет функция $\alpha(t)$. Это представление мы называем *реализацией на группе* T.

3. Реализация на группе $\mathfrak{U}$. Вместо разложения Гаусса мы могли бы воспользоваться разложением Грама: $g = \varepsilon \zeta u$ (§ 9). Из этого разложения очевидно, что всякая функция $f \in \mathfrak{R}_\alpha$ вполне определяется своими значениями на унитарной подгруппе $\mathfrak{U} = \mathrm{SU}(n)$. Формула представления принимает следующий вид:

$$T_g \varphi(u) = \alpha(\varepsilon') \varphi(u_g).$$

Здесь матрицы ε', u_g определяются из разложения Грама $ug = \varepsilon'\zeta u_g$. Функции из пространства представления удовлетворяют соотношению $\varphi(\gamma u) = \alpha(\gamma)\varphi(u)$, где γ пробегает «диагональную» подгруппу Γ, состоящую из всех диагональных матриц $\gamma \in \mathfrak{U}$. Роль старшего вектора играет функция $\alpha(u)$. Заметим также, что

$$T_{u_0}\varphi(u) = \varphi(uu_0), \qquad u_0 \in \mathfrak{U},$$

т. е. действие элементов $u_0 \in \mathfrak{U}$ сводится к правому сдвигу на $\mathfrak{U}$.

До сих пор мы рассматривали произвольные вещественные представления группы G. Если ограничиться аналитическими представлениями, то они остаются неприводимыми при сужении на унитарную подгруппу $\mathfrak{U}$. В результате получаем описание всех таких представлений.

Теорема 3. *Всякое неприводимое представление группы $\mathfrak{U} = U(n)$ определяется однозначно, с точностью до эквивалентности, некоторым характером $\alpha(\gamma)$ диагональной подгруппы Γ. Это представление может быть реализовано с помощью правых сдвигов*

$$R_{u_0}\varphi(u) = \varphi(uu_0)$$

в конечномерном пространстве $\mathfrak{D}_\alpha$, состоящем из функций $\varphi(u)$ на группе $\mathfrak{U}$. Пусть $\alpha(\delta)$ — аналитическое продолжение $\alpha(\gamma)$ на группу D и $\alpha(g)$ — соответствующая функция на группе G. Полагая $\alpha(u) = \alpha(g)|_{g=u}$, мы можем охарактеризовать пространство $\mathfrak{D}_\alpha$ как циклическую оболочку функции $\alpha(u)$. То же верно для группы $SU(n)$.

Напомним, что матрица ε, входящая в разложение Грама, является диагональной положительно определенной матрицей. Отсюда следует, в частности, что $ugg^*u^{-1} = \varepsilon'\zeta\zeta^*\varepsilon'$ и $\alpha(\varepsilon'^2) = \alpha(ugg^*u^{-1})$. Извлекая квадратный корень, заключаем, что множитель $\alpha(\varepsilon')$ может быть записан следующим образом:

$$\alpha(\varepsilon') = \{\alpha(ufu^{-1})\}^{1/2},$$

где положено $f = gg^*$. Практически реализация на группе $\mathfrak{U}$ является довольно сложной ввиду отсутствия простой параметризации для группы $\mathfrak{U}$. В то же время

многообразие Z изоморфно евклидову пространству и легко параметризуется. Поэтому неприводимое представление группы $\mathfrak{U}$ обычно бывает удобно рассматривать также в реализации на группе Z.

Упражнение

Пусть диагональные матрицы ε, ε' связаны разложением Грама $u\varepsilon = \varepsilon'\zeta v$. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ — логарифмы собственных значений матриц ε, ε', причем $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n$. Показать, что

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n,$$

$$\tau_{i_1} + \tau_{i_2} + \ldots + \tau_{i_k} \leqslant t_1 + t_2 + \ldots + t_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

при любом выборе матрицы $u \in \mathrm{U}(n)$. Здесь $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — произвольный набор индексов, принимающих значения $1, 2, \ldots, n$. Сравнить с результатом упражнения 2 на стр. 345.

§ 49. Индуктивные веса

Для полного решения задачи классификации осталось перечислить все характеры $\alpha(\delta)$, которые являются старшими весами неприводимых представлений группы G. Такие характеры мы будем называть *индуктивными*.

Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — главные диагональные миноры матрицы $g \in G$. Если $g = \delta$, то эти миноры являются мультипликативными параметрами матрицы δ. Следовательно, всякий характер $\alpha(\delta)$ мы можем также записывать в виде

$$\alpha(\delta) = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i^{r_i}.$$

Здесь мы рассматриваем для простоты только комплексно-аналитические характеры. В общем случае необходимо добавить сомножители $\bar{\Delta}_i$ в некоторых степенях. Заметим, что $\Delta_n = \det g = 1$ для элементов группы $\mathrm{SL}(n)$, однако мы сохраняем множитель Δ_n для обобщения на $\mathrm{GL}(n)$. Существенно, что все миноры Δ_i обладают следующим свойством: $\Delta_i(\zeta\delta z) = \Delta_i(\delta)$. Следовательно, имеет место также формула

$$\alpha(g) = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i^{r_i},$$