многообразие Z изоморфно евклидову пространству и легко параметризуется. Поэтому неприводимое представление группы $\mathfrak{U}$ обычно бывает удобно рассматривать также в реализации на группе Z.

Упражнение

Пусть диагональные матрицы ε, ε' связаны разложением Грама $u\varepsilon = \varepsilon'\zeta v$. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ — логарифмы собственных значений матриц ε, ε', причем $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n$. Показать, что

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n,$$

$$\tau_{i_1} + \tau_{i_2} + \ldots + \tau_{i_k} \leqslant t_1 + t_2 + \ldots + t_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

при любом выборе матрицы $u \in \mathrm{U}(n)$. Здесь $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — произвольный набор индексов, принимающих значения $1, 2, \ldots, n$. Сравнить с результатом упражнения 2 на стр. 345.

§ 49. Индуктивные веса

Для полного решения задачи классификации осталось перечислить все характеры $\alpha(\delta)$, которые являются старшими весами неприводимых представлений группы G. Такие характеры мы будем называть *индуктивными*.

Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — главные диагональные миноры матрицы $g \in G$. Если $g = \delta$, то эти миноры являются мультипликативными параметрами матрицы δ. Следовательно, всякий характер $\alpha(\delta)$ мы можем также записывать в виде

$$\alpha(\delta) = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i^{r_i}.$$

Здесь мы рассматриваем для простоты только комплексно-аналитические характеры. В общем случае необходимо добавить сомножители $\bar{\Delta}_i$ в некоторых степенях. Заметим, что $\Delta_n = \det g = 1$ для элементов группы $\mathrm{SL}(n)$, однако мы сохраняем множитель Δ_n для обобщения на $\mathrm{GL}(n)$. Существенно, что все миноры Δ_i обладают следующим свойством: $\Delta_i(\zeta\delta z) = \Delta_i(\delta)$. Следовательно, имеет место также формула

$$\alpha(g) = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i^{r_i},$$

где Δ_i на этот раз означает главный диагональный минор матрицы g. Заметим, что параметры r_i связаны с параметрами m_i в разложении $\alpha(\delta)=\prod_{i=1}^{n}\delta_i^{m_i}$ следующими соотношениями:

$$r_i=m_i-m_{i+1}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где положено для общности записи $m_{n+1}=0$. Если параметры r_i являются неотрицательными целыми числами, то функция $\alpha(g)$ является полиномом на группе G. Отсюда следует, что в данном случае $\mathfrak{R}_\alpha$ конечномерно, и мы получаем серию неприводимых представлений группы G. Поскольку Δ_n является инвариантом, тот же результат получается при произвольном целом r_n. Заметим, что полученные условия $r_i\geqslant 0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, равносильны следующему свойству упорядоченности:

$$m_1\geqslant m_2\geqslant m_3\geqslant\ \ldots\ \geqslant m_n.$$

Теорема 4. *Характер $\alpha(\delta)$ является старшим весом тогда и только тогда, когда для его показателей выполняется соотношение упорядоченности $m_1\geqslant m_2\geqslant\ldots\ldots\geqslant m_n$. Иначе говоря, все разности $r_i=m_i-m_{i+1}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, должны быть неотрицательными целыми.*

Замечание 1. Мы рассматриваем здесь только аналитические характеры $\alpha(\delta)$. Отсюда непосредственно вытекает целочисленность m_i для $\mathrm{GL}(n)$ и целочисленность разностей m_i-m_{i+1} для $\mathrm{SL}(n)$. Вещественные характеры $\alpha(\delta)$ будут рассмотрены ниже.

Доказательство. Необходимость условий упорядоченности была уже доказана в § 44 путем рассмотрения симметрии относительно группы Вейля. Если мы желаем получить независимое доказательство, то можно поступить следующим образом.

Заметим, что если G_0 — подгруппа в группе G, сохраняющая все базисные векторы, кроме e_i, e_{i+1}, то G_0 изоморфна $\mathrm{SL}(2)$ и разложение Гаусса в группе G индуцирует разложение Гаусса в G_0. Если $g\in G_0$, $z\in Z\cap G_0$, то формула

$$T_g f(z)=\alpha(z,g)f(z_g)$$

определяет неприводимое представление SL(2) в циклической оболочке старшего вектора f_0 *). Следовательно, если характер $\alpha(\delta)$ индуктивен по отношению к группе G, то его сужение на подгруппу $D_0 = D \cap G_0$ является индуктивным по отношению к G_0. Заметим теперь, что

$$\alpha(\delta_0) = \lambda^{m_i - m_{i+1}},$$

где $\lambda = \delta_{ii}$ — единственный мультипликативный параметр в группе D_0 **). Как следует из теории представлений группы SL(2), показатель $m_i - m_{i+1}$ должен быть целым неотрицательным ***). Следовательно, $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$.

Достаточность этих условий доказана в начале настоящего параграфа.

Теорема доказана.

Замечание 2. Если $G = \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$, то параметры $m_1, m_2, \ldots, m_n$ определяются с точностью до общего слагаемого (ибо $\det g = 1$); следовательно, такие параметры могут быть и нецелыми. Они становятся целыми, если ввести нормировку $m_n = 0$ (вообще если хотя бы одно из чисел m_i выбрать целым).

Замечание 3. Если рассматривать *вещественные* представления группы G, то общий вид характера $\alpha(\delta)$ дается следующей формулой:

$$\alpha(\delta) = \prod_{i=1}^{n} \delta_i^{k_i} \bar{\delta}_i^{l_i}.$$

Если мы желаем рассматривать только однозначные представления, то разности $k_i - l_i$ необходимо выбрать целыми для группы GL(n). Повторяя доказательство теоремы 4, получаем следующие ограничения:

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n, \quad l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_n.$$

При этом числа $k_i - k_{i+1}$, $l_i - l_{i+1}$ обязательно должны быть целыми при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Однако числа k_n, l_n не обязаны быть целыми в случае GL(n) и не обязаны быть положительными.

---

*) Это следует из мультипликативной формулы для $\alpha(z, g)$.

**) $\delta_{i+1,\, i+1} \lambda^{-1}$ в силу условия $\det g = 1$; $\delta_k = 1$ при $k \neq i$, $i+1$.

***) Глобальное доказательство для SL(2) см. в [84], стр. 42.

Замечание 4. Всякое неприводимое представление $GL(n)$ может быть построено по формуле неприводимого представления $SL(n)$ с добавочным скалярным множителем вида $(\det g)^{k_n}(\overline{\det g})^{l_n}$.

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать только аналитические представления $GL(n)$. Всякий вектор $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ с целочисленными координатами, удовлетворяющими условиям упорядоченности $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$, мы будем называть *сигнатурой*. В случае $SL(n)$ эта сигнатура определяется с точностью до общего слагаемого у всех координат $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

§ 50. Произведение Юнга

Условимся использовать наряду с обозначением $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ также обозначение $\alpha = [r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}]$ для сигнатуры $SL(n)$, где положено $r_i = m_i - m_{i+1}$. При этом все параметры r_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, являются целыми неотрицательными. Следовательно, множество всех сигнатур порождается векторами

$$\alpha_i = [0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$$

(с единицей на i-м месте) относительно сложения. Неприводимые представления $\boldsymbol{d}_i = d(\alpha_i)$ мы условимся называть *базисными* представлениями группы $SL(n)$*). Выясним геометрическую структуру каждого из этих представлений.

Пусть $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ — антисимметричный тензор ранга p. В силу условия антисимметричности мы получим полную систему независимых координат, если положим $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$. Пусть $e_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ — соответствующий базисный вектор (т. е. тензор, у которого отлична от нуля только одна независимая координата $t^{i_1 i_2 \ldots i_p} = 1$). Вектор $e_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ является весовым с весом

$$\mu_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \delta_{i_1} \delta_{i_2} \ldots \delta_{i_p}.$$

---

*) В статье [84] эти представления обозначались символами Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.