Замечание 4. Всякое неприводимое представление $GL(n)$ может быть построено по формуле неприводимого представления $SL(n)$ с добавочным скалярным множителем вида $(\det g)^{k_n}(\overline{\det g})^{l_n}$.

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать только аналитические представления $GL(n)$. Всякий вектор $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ с целочисленными координатами, удовлетворяющими условиям упорядоченности $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$, мы будем называть *сигнатурой*. В случае $SL(n)$ эта сигнатура определяется с точностью до общего слагаемого у всех координат $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

§ 50. Произведение Юнга

Условимся использовать наряду с обозначением $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ также обозначение $\alpha = [r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}]$ для сигнатуры $SL(n)$, где положено $r_i = m_i - m_{i+1}$. При этом все параметры r_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, являются целыми неотрицательными. Следовательно, множество всех сигнатур порождается векторами

$$\alpha_i = [0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$$

(с единицей на i-м месте) относительно сложения. Неприводимые представления $\boldsymbol{d}_i = d(\alpha_i)$ мы условимся называть *базисными* представлениями группы $SL(n)$*). Выясним геометрическую структуру каждого из этих представлений.

Пусть $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ — антисимметричный тензор ранга p. В силу условия антисимметричности мы получим полную систему независимых координат, если положим $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$. Пусть $e_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ — соответствующий базисный вектор (т. е. тензор, у которого отлична от нуля только одна независимая координата $t^{i_1 i_2 \ldots i_p} = 1$). Вектор $e_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ является весовым с весом

$$\mu_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \delta_{i_1} \delta_{i_2} \ldots \delta_{i_p}.$$

---

*) В статье [84] эти представления обозначались символами Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

В силу условия $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ все такие веса различны. Следовательно, всякий старший вектор должен совпадать с одним из элементов $e_{i_1 i_2 \ldots i_p}$. Однако условию упорядоченности сигнатуры удовлетворяет лишь единственный вес $\Delta_p = \mu_{1\,2\ldots p}$:

$$\Delta_p = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_p.$$

Соответствующая сигнатура определяется равенствами $r_p = 1$, $r_k = 0$ при $k \neq p$, т. е. совпадает с символом Δ_p, определенным выше. Следовательно, тензор $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ неприводим и соответствующая сигнатура совпадает с Δ_p.

Антисимметричные тензоры ранга p называются *поливекторами*. Очевидно, поливектор ранга p определен только при $1 \leqslant p \leqslant n$. (Если $p > n$, то тензор $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ обращается тождественно в нуль в силу условий антисимметрии.) Таким образом, базисное представление $\boldsymbol{d}_p$ отождествляется с поливектором ранга p *).

Из строения произвольной сигнатуры ясно, что всякое представление $d(\alpha)$ может быть определенным образом построено из базисных представлений $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_{n-1}$. Ясно, что искомая конструкция не сводится к тензорному произведению, ибо тензоры, как правило, приводимы. Для ответа на поставленный вопрос мы используем операцию умножения в классе функций на группе G (либо также на подгруппах Z, T, $\mathfrak{U}$).

Пусть $\mathfrak{R}_\alpha$ — пространство неприводимого представления в одной из функциональных реализаций, описанных выше. Введем обозначение $\mathfrak{R}_\alpha \mathfrak{R}_\beta$ для линейной оболочки всех произведений вида $\varphi(x)\psi(x)$, $\varphi \in \mathfrak{R}_\alpha$, $\psi \in \mathfrak{R}_\beta$. Докажем, что имеет место

Теорема 5. $\mathfrak{R}_{\alpha+\beta} = \mathfrak{R}_\alpha \mathfrak{R}_\beta$.

Доказательство. Рассмотрим, например, реализацию на группе G (во всех остальных случаях доказательство аналогично). Тогда пространство $\mathfrak{R}_\alpha \mathfrak{R}_\beta$

---

*) В реализации на группе G базисный вектор $e_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ отождествляется с минором $g_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ матрицы g, составленным из первых p строк и столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_p$.

натянуто на функции

$$f_{g_1g_2} = \alpha(gg_1)\beta(gg_2), \qquad g_1,\ g_2 \in G.$$

Отсюда очевидно, что оно инвариантно относительно $R_{g_0}(R_{g_0}f_{g_1g_2} = f_{g_1g_0,\ g_2g_0})$. Ясно также, что $\mathfrak{R}_\alpha\mathfrak{R}_\beta$ конечномерно. В то же время $\mathfrak{R}_{\alpha+\beta}$ натянуто на функции

$$f_{g_0} = \alpha(gg_0)\beta(gg_0)$$

и потому является подпространством в $\mathfrak{R}_\alpha\mathfrak{R}_\beta$. Осталось доказать, что последнее пространство неприводимо. Поскольку все функции из этого пространства удовлетворяют соотношениям

$$f(\zeta g) = f(g), \quad f(\delta g) = \alpha(\delta)\beta(\delta)f(g),$$

то они вполне определяются своими значениями на Z. Поскольку операция R_{z_0} сводится к правому сдвигу на Z, то единственной функцией $f(z)$, удовлетворяющей условию $R_{z_0}f(z) = f(z)$, является (с точностью до множителя) $f_0(z) \equiv 1$. Из единственности старшего вектора заключаем, что $\mathfrak{R}_\alpha\mathfrak{R}_\beta$ неприводимо. Теорема доказана.

Полученный результат показывает, что операция умножения в классе функций на группе G является искомой операцией, заменяющей тензорное произведение.

Определение 2. Представление $d(\alpha+\beta)$ мы будем называть *произведением Юнга* представлений $d(\alpha)$, $d(\beta)$ и использовать для этого произведения символ $d(\alpha)d(\beta)$.

Абстрактное множество, удовлетворяющее всем аксиомам группы, кроме наличия обратного элемента, принято называть *полугруппой*. В терминах произведения Юнга результат произведенной классификации можно выразить следующим образом:

Следствие. *Множество всех неприводимых аналитических представлений группы* $G = \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$ *является полугруппой с образующими* $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_{n-1}$, *где* $\boldsymbol{d}_p$ — *поливектор ранга* p:

$$d(\alpha) = \boldsymbol{d}_1^{r_1}\boldsymbol{d}_2^{r_2} \ldots \boldsymbol{d}_{n-1}^{r_{n-1}}.$$

Заменяя $\mathrm{SL}(n)$ на $\mathrm{GL}(n)$, мы должны добавить *две* образующие: $\boldsymbol{d}_n$ и $\boldsymbol{d}_n^{-1}$, ибо показатель r_n может быть положительным и отрицательным. Если рассматривать

вещественные представления $SL(n)$, то число образующих удваивается за счет добавления комплексно сопряженных представлений $\bar{\boldsymbol{d}}_1, \bar{\boldsymbol{d}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{d}}_{n-1}$. Если рассматривать вещественные представления $GL(n)$, то полугруппа представлений перестает быть дискретной, ибо множители $\det g$, $\overline{\det g}$ входят необязательно с целыми показателями.

В дальнейшем мы увидим, что представление $d(\alpha)$ содержится в тензорном произведении $\boldsymbol{d}_{i_1} \otimes \boldsymbol{d}_{i_2} \otimes \ldots \ldots \otimes \boldsymbol{d}_{i_m}$, где множитель $\boldsymbol{d}_i$ встречается r_i раз. При этом $d(\alpha)$ содержится в таком произведении *однократно* и сигнатура α является *старшей* среди всех остальных сигнатур, входящих в это произведение (относительно лексикографической упорядоченности). Отсюда вытекает возможность иного определения произведения Юнга.

Упражнение

Сформулировать результат классификации неприводимых представлений $U(n)$ в «инвариантных» терминах (не зависящих от выбора базиса, в котором группа D диагональна.) Указание: использовать орбиты в классе эрмитовых матриц $n \times n$ относительно присоединенного представления $U(n)$ (каждой такой орбите с целочисленными собственными значениями ставится в соответствие неприводимое представление $U(n)$) *).

* * *

Глобальный метод, которому мы следовали в этой главе, впервые был предложен Р. Годеманом [74]. Однако функциональная реализация представлений (на группе Z, на группе $\mathfrak{U}$) была введена еще раньше в фундаментальной работе И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [68] по теории бесконечномерных представлений. Изложение в этой главе следует статье автора [84], где развивается метод Р. Годемана. Свойство мультипликативности пространств $\mathfrak{R}_\alpha$ было впервые отмечено автором в работе [85].

В дальнейшем мы значительно уточним описание канонической модели представления $d(\alpha)$ (гл. X) и обобщим эти результаты на конечномерные представления произвольной связной группы Ли (гл. XVI). В следующей главе будет изложена классическая конструкция представлений $d(\alpha)$ в классе тензоров; там же будут указаны еще и другие модели $d(\alpha)$.

---

*) Общий способ классификации неприводимых (бесконечномерных) представлений в терминах орбит предложен А. А. Кирилловым для класса групп, не содержащего $U(n)$; однако этот способ переносится также и на компактные группы Ли.