ГЛАВА VIII

# ТЕНЗОРЫ И ДИАГРАММЫ ЮНГА

Изучение тензоров является классической задачей теории представлений. Речь идет о спектральном анализе, т. е. о разложении тензоров на неприводимые компоненты. Исторически решение этой задачи впервые позволило Г. Вейлю [10] дать явную модель неприводимых представлений группы $\mathrm{GL}(n)$ и других классических групп. Мы приступим к решению этой задачи, уже имея информацию о запасе неприводимых представлений. Для простоты мы будем рассматривать только контравариантные тензоры для группы $G = \mathrm{GL}(n)$.

В конце главы по аналогии с тензорами изложим также две другие конструкции неприводимых представлений группы $G$.

## § 51. Описание $Z$-инвариантов

Вместо тензоров $t^{i_1 i_2 \cdots i_m}$ нам будет удобно рассматривать соответствующие полилинейные формы $\varphi(x, y, \ldots, w) = t^{i_1 i_2 \cdots i_m} x_{i_1} y_{i_2} \ldots w_{i_m}$, где $x, y, \ldots, w$ — система $m$ независимых ковариантных векторов-строк. Согласно общим замечаниям, сделанным в конце § 14, мы можем вместо тензорного закона преобразований рассматривать операторы

$$T_g \varphi(x, y, \ldots, w) = \varphi(xg, yg, \ldots, wg),$$

определенные в классе полилинейных форм. Пусть $\Phi$ означает полную алгебру (контравариантных) тензоров и $\Phi_m$ — конечномерное подпространство тензоров ранга $m$. Мы отождествляем тензоры с соответствующими формами. Таким образом, операторы $T_g$ образуют представление группы $G$ в пространстве $\Phi_m$. Очевидно, это пред-

ставление имеет вид

$$\pi_m = \boldsymbol{d}_1 \otimes \boldsymbol{d}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{d}_1$$

($m$ сомножителей), т. е. совпадает с $m$-й тензорной степенью неприводимого представления $\pi_1 = \boldsymbol{d}_1$. Поскольку представление $\pi_m$ аналитично, оно вполне приводимо. Следовательно, мы можем поставить задачу о разложении $\pi_m$ на неприводимые представления.

Следуя методу $Z$-инвариантов, мы решаем вначале систему уравнений $\varphi(xz, yz, \ldots, wz) = \varphi(x, y, \ldots, w)$, где $z$ пробегает группу $Z$ всех верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали. Отметим вначале следующее легко проверяемое утверждение:

1° *Миноры*

$$\omega_p = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_p \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_p \end{vmatrix}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant n,$$

*являются $Z$-инвариантами.*

Далее, если $\varphi$ и $\psi$ являются $Z$-инвариантами, то это верно также для $\lambda\varphi + \mu\psi$, $\varphi\psi$. Иначе говоря, имеет место

2° *Множество $\Omega$ всех $Z$-инвариантов является подалгеброй в алгебре $\Phi$.*

Заметим, что умножение в алгебре $\Phi$ некоммутативно. Действительно, в терминах полилинейных форм умножение двух тензоров $\varphi$, $\psi$ задается равенством $\varphi\psi(x, y, \ldots, w, x', y', \ldots, w') = \varphi(x, y, \ldots, w)\psi(x', y', \ldots, w')$ и произведение, взятое в другом порядке, отличается перестановкой аргументов. Для наших целей существенно также следующее замечание:

3° *Алгебра $\Omega$ инвариантна относительно всевозможных подстановок $s\varphi(x, y, \ldots, w) = \varphi(x', y', \ldots, w')$, где $x', y', \ldots, w'$ — подстановка $x, y, \ldots, w$.*

Комбинируя 1° — 3°, мы получаем в алгебре $\Omega$ следующий запас одночленов:

$$\omega(\alpha, s) = s\omega_1^{r_1}\omega_2^{r_2} \ldots \omega_n^{r_n},$$

где символ $\alpha$ отождествляется с набором неотрицательных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и символ $s$ означает произвольную подстановку.

В теории инвариантов доказывается ([10]), что одночлены вида $\omega(\alpha, s)$ образуют линейный базис в пространстве $\Omega$. Это утверждение сразу решает вопрос о полном запасе $Z$-инвариантов. В действительности это утверждение мы не будем использовать (и даже получим его независимое доказательство из общих результатов спекгрального анализа). Тем не менее для более удобного обзора ситуации мы можем вначале иметь в виду этот общий результат, который сформулируем в виде следующей леммы:

Лемма 1. *Миноры $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ являются образующими в алгебре $\Omega$.*

Выясним действие диагональной группы $D$ на миноры $\omega_p$. Если $\delta = \operatorname{diag}\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$, то положим $\Delta_p = \delta_1\delta_2 \ldots \delta_p$. Очевидно, $\omega_p \to \omega_p\Delta_p$ под действием оператора $T_\delta$. Следовательно, всякий одночлен $\omega(\alpha, s)$ является весовым с весом

$$\alpha(\delta) = \delta_1^{m_1}\delta_2^{m_2} \ldots \delta_n^{m_n} = \Delta_1^{r_1}\Delta_2^{r_2} \ldots \Delta_n^{r_n}.$$

Здесь числа $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$ неотрицательные целые и числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ связаны с ними обычными соотношениями гл. VII: $r_i = m_i - m_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $m_{n+1} = 0$. Очевидно, числа $r_i$ совпадают с показателями одночлена $\omega(\alpha, s)$. Заметим, что при этом

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n,$$

где $m$ — ранг тензора $\omega(\alpha, s)$. Как и в гл. VII, мы полагаем $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_n) = [r_1, r_2, \ldots, r_n]$. Для краткости введем обозначение $|\alpha|$ для суммы $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. Из леммы 1 непосредственно находим

Следствие 1. *Всякий старший вектор сигнатуры $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ содержится в линейной оболочке одночленов $\omega(\alpha, s)$ с фиксированным $\alpha$.*

Указанную линейную оболочку обозначим символом $\Omega_\alpha = \Omega_{m_1 m_2 \ldots m_n}$. Тогда $\Omega = \sum \Omega_\alpha$. Кроме того, $\Omega_m = \sum_{|\alpha| = m} \Omega_\alpha$, где $\Omega_m$ означает множество всех $Z$-инвариантов ранга $m$.

Соответственно $\Phi_m = \sum_{|\alpha|=m} \Phi_\alpha$, где $\Phi_\alpha$ — циклическая оболочка $\Omega_\alpha$ относительно группы $G$.

Следствие 2. *Кратность вхождения неприводимого представления $d(\alpha)$ совпадает с числом линейно независимых одночленов среди $\omega(\alpha, s)$.*

Результат нашего исследования может быть записан в виде $\pi_m = \sum_{|\alpha|=m} k(\alpha) d(\alpha)$, где $k(\alpha)$ — кратность вхождения $d(\alpha)$ в $\Phi_m$, а также и во всю алгебру $\Phi$.

Пример 1. $\pi_1 = \boldsymbol{d}_1$. Представление $\pi_1$ неприводимо.

Пример 2. $\pi_2 = \boldsymbol{d}_1^2 + \boldsymbol{d}_2$. Действительно, при $m = 2$ имеются только старшие векторы

$$\omega_1^2 = \omega_1(x)\,\omega_1(y), \quad \omega_2 = \omega_2(x, y)$$

и векторы, получаемые из них перестановками аргументов $x$, $y$. Поскольку эти перестановки сохраняют $\omega_1^2$ и меняют знак $\omega_2$, то мы получаем коллинеарные векторы. Следовательно,

$$\alpha = [2, 0, \ldots, 0], \quad \beta = [0, 1, 0, \ldots, 0]$$

являются единственно возможными сигнатурами и каждая из них встречается однократно.

Пример 3. $\pi_3 = \boldsymbol{d}_1^3 + 2\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3$. Действительно, в данном случае имеются три вектора:

$$\omega_1^3 = \omega_1(x)\,\omega_1(y)\,\omega_1(z), \quad \omega_1\omega_2 = \omega_1(x)\,\omega_2(y, z), \quad \omega_3 = \omega_3(x, y, z),$$

а также векторы, получаемые из них путем всевозможных подстановок аргументов $x$, $y$, $z$. Эти подстановки не меняют $\omega_1^3$, сохраняют $\omega_3$ с точностью до знака и переводят форму $\omega_1\omega_2$ с точностью до знака в три формы $\tau$, $\tau'$, $\tau''$, для которых $\tau + \tau' + \tau'' = 0$ (циклическая подстановка $x$, $y$, $z$). В то же время нетрудно видеть, что формы $\tau$, $\tau'$ линейно независимы; отсюда ясно, что $\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_2$ встречается двукратно.

В общем случае легко проверить, что имеют место следующие закономерности:

1. *Представление* $\boldsymbol{d}_1^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, *встречается в* $\Phi$ *однократно* (*симметричные тензоры ранга* $m$).

2. *Представление* $\boldsymbol{d}_p$, $1 \leqslant p \leqslant n$, *встречается в* $\Phi$ *однократно* (*поливекторы ранга* $p$).

Остальные представления требуют значительно более глубокого изучения. В игру вступает симметрическая группа $S = \mathrm{S}(m)$ всех подстановок $m$ аргументов $x, y, \ldots$ $\ldots, w$. (На языке тензорных индексов это означает подстановку $i_1, i_2, \ldots, i_m$.) К рассмотрению группы $S$, действующей в пространстве $\Phi_m$, мы сейчас и переходим.

## § 52. Диаграммы Юнга

Для более глубокого изучения симметрии в классе тензоров мы займемся вначале более подробным изучением симметрической группы $S = \mathrm{S}(m)$. Нам будет удобно рассматривать эту группу как группу преобразований в классе чисел $i = 1, 2, \ldots, m$. Каждый элемент $s \in S$ определяется при этом системой чисел $si = s1, s2, \ldots, sm$, которые принимают те же значения в другом порядке. Обычно в этом случае используется запись

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ s1 & s2 & \ldots & sm \end{pmatrix},$$

причем порядок размещения каждой пары $(k, sk)$ считается несущественным. Закон композиции в группе определяется по правилу $s\sigma i = s(\sigma i)$. Обратное преобразование $s^{-1}$ мы также будем обозначать символом $s'$ *). Поскольку обратное преобразование сводится к инверсии пары $(k, sk)$, то мы имеем

$$s = \begin{pmatrix} s'1 & s'2 & \ldots & s'm \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix}.$$

Ясно, что операция $s'$ удовлетворяет тождеству $(s\sigma)' = \sigma' s'$. Допустим теперь, что $Y = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ — упо-

*) Если рассматривать $i$ как базисный вектор в $m$-мерном евклидовом пространстве, то мы получаем точное линейное представление группы $S$ и штрих отождествляется с транспонированием (поскольку все матрицы $s \in S$ ортогональны).