1. *Представление* $\boldsymbol{d}_1^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, *встречается в* Φ *однократно* (*симметричные тензоры ранга* m).

2. *Представление* $\boldsymbol{d}_p$, $1 \leqslant p \leqslant n$, *встречается в* Φ *однократно* (*поливекторы ранга* p).

Остальные представления требуют значительно более глубокого изучения. В игру вступает симметрическая группа $S = \mathrm{S}(m)$ всех подстановок m аргументов $x, y, \ldots$ $\ldots, w$. (На языке тензорных индексов это означает подстановку $i_1, i_2, \ldots, i_m$.) К рассмотрению группы S, действующей в пространстве Φ_m, мы сейчас и переходим.

§ 52. Диаграммы Юнга

Для более глубокого изучения симметрии в классе тензоров мы займемся вначале более подробным изучением симметрической группы $S = \mathrm{S}(m)$. Нам будет удобно рассматривать эту группу как группу преобразований в классе чисел $i = 1, 2, \ldots, m$. Каждый элемент $s \in S$ определяется при этом системой чисел $si = s1, s2, \ldots, sm$, которые принимают те же значения в другом порядке. Обычно в этом случае используется запись

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ s1 & s2 & \ldots & sm \end{pmatrix},$$

причем порядок размещения каждой пары (k, sk) считается несущественным. Закон композиции в группе определяется по правилу $s\sigma i = s(\sigma i)$. Обратное преобразование s^{-1} мы также будем обозначать символом s' *). Поскольку обратное преобразование сводится к инверсии пары (k, sk), то мы имеем

$$s = \begin{pmatrix} s'1 & s'2 & \ldots & s'm \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix}.$$

Ясно, что операция s' удовлетворяет тождеству $(s\sigma)' = \sigma' s'$. Допустим теперь, что $Y = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ — упо-

*) Если рассматривать i как базисный вектор в m-мерном евклидовом пространстве, то мы получаем точное линейное представление группы S и штрих отождествляется с транспонированием (поскольку все матрицы $s \in S$ ортогональны).

рядоченная схема, заполненная m «предметами» $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_m$ (природа этих предметов несущественна *)). Мы определяем действие подстановки s на схему Y по правилу

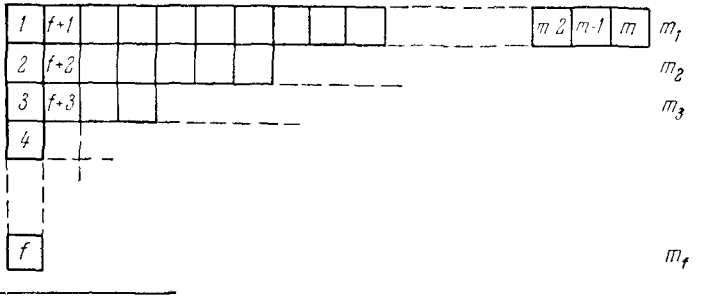
$$\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}_s = \{i_{s1}, i_{s2}, \ldots, i_{sm}\}.$$

Иначе говоря, *в схеме Y_s на месте с номером k располагается предмет, который в схеме Y был расположен на месте с номером sk.* При этом, как нетрудно видеть, выполняется следующий закон композиции:

$$Y_{s\sigma} = (Y_s)_\sigma.$$

Существенно заметить, что действие подстановки определяется не номерами предметов, а номерами тех мест, на которых они расположены **)). Вслед за Г. Вейлем мы можем повторить, что «весь этот на вид чрезмерный педантизм оказывает серьезную помощь в уяснении порядка, в котором выполняется композиция подстановок».

Рассмотрим теперь произвольное разбиение $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_f$ числа m в сумму f невозрастающих натуральных слагаемых: $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_f$. Всякому такому набору чисел сопоставим индекс α, называемый *сигнатурой*. Дополняя эти числа нулями, можем считать, не ограничивая общности, что $f = m$. В классе сигнатур мы будем использовать обычное определение лексикографической упорядоченности. Рассмотрим клеточную таблицу $Y(\alpha)$:



*) В приложениях, которые нас интересуют, роль предметов $i_1, i_2, \ldots, i_m$ будут играть тензорные индексы (принимающие значения 1, 2, ..., m) либо векторные аргументы $x, y, \ldots, w$.

**) В то же время предмет с номером k располагается в схеме Y_s на месте с номером $s'k$.

Эта таблица содержит m_1 клеток в первой строке, m_2 клеток во второй и т. д. Если положим $r_i = m_i - m_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, f$, $m_{f+1} = 0$, то r_p означает число столбцов длины p. На чертеже указана фиксированная нумерация полей, которую условимся называть *стандартной*. Всякая таблица такого типа называется *диаграммой Юнга*. Если эта таблица заполняется предметами $i_1, i_2, \ldots, i_m$, причем предмет i_k располагается на месте с номером k, то такое заполнение будем называть *стандартным* и обозначать тем же символом $Y(\alpha)$. Символом $Y_s(\alpha)$ будет обозначаться схема, получаемая из $Y(\alpha)$ по указанному выше правилу подстановок.

С каждой сигнатурой α мы свяжем следующие подгруппы в группе S. Подгруппа P состоит из всех «горизонтальных движений» в схеме $Y(\alpha)$ (движение внутри строк). Подгруппа Q состоит из всех «вертикальных движений» (движения внутри столбцов). Положим также

$$R = QP.$$

Элементы этого множества (которое, вообще говоря, не является группой) условимся называть *элементарными подстановками*. Если $s = \sigma r$, $r \in R$, то условимся говорить, что s *элементарно выражается через* σ. В заключение этого параграфа докажем простую комбинаторную лемму, которая будет играть принципиальную роль во всех дальнейших построениях:

Лемма 2. *Если $\alpha > \alpha'$, то при любых подстановках s, σ существует пара предметов, расположенных в одной и той же строке диаграммы $Y_s(\alpha)$ и в одном и том же столбце диаграммы $Y_\sigma(\alpha')$. То же верно, если $\alpha = \alpha'$, но s не выражается элементарно через σ.*

Доказательство. Положим $Y = Y_s(\alpha)$, $Y' = Y_\sigma(\alpha')$. Условие $m'_1 \leqslant m_1$ означает, что число столбцов диаграммы Y' не превосходит числа предметов, расположенных в первой строке диаграммы Y. Следовательно, если все такие предметы попадают в различные столбцы диаграммы Y', то обязательно $m_1 = m'_1$. Отбрасывая эти элементы, получаем то же заключение для всех остальных строк. Следовательно, если все предметы, находившиеся в одной строке диаграммы Y, попадают в

разные столбцы диаграммы Y', то $\alpha = \alpha'$. Производя в диаграмме Y' вертикальное движение q, мы можем поставить каждый предмет в ту строку, где он был расположен в диаграмме Y. Производя затем горизонтальное движение p, мы отождествляем Y и Y'_{qp}. Но это означает, что $s = \sigma r$, где $r = qp$. Лемма доказана.

Очевидно, лемма 2 является качественным выражением того обстоятельства, что с понижением сигнатуры «повышается роль столбцов». Отсюда вытекает также

Следствие. *Если $\alpha > \alpha'$, то для любых подстановок s, σ существуют горизонтальная транспозиция p_0 в $Y(\alpha)$ и вертикальная транспозиция q_0 в $Y(\alpha')$, для которых*

$$sp_0s^{-1} = \sigma q_0\sigma^{-1}.$$

То же верно, если $\alpha = \alpha'$, но s не выражается элементарно через σ. В частности, если s не элементарно, то существуют транспозиции p_0, q_0 для которых

$$sp_0 = q_0s.$$

Действительно, пусть i, j — номера предметов, указанных в лемме 2; тогда эти предметы расположены на местах $s'i$, $s'j$ в таблице $Y_s(\alpha)$ и на местах $\sigma'i$, $\sigma'j$ в таблице $Y_\sigma(\alpha')$. В качестве p_0, q_0 мы выбираем транспозиции этих пар. При этом равенства $sp_0s'i = j$, $\sigma q_0\sigma'i = j$ означают, что $\tau_0 = sp_0s' = \sigma q_0\sigma'$ есть транспозиция пары (i, j).

§ 53. Симметризаторы Юнга

Мы будем рассматривать формальные линейные комбинации элементов $s \in S$, т. е. групповое кольцо, состоящее из элементов $x = \Sigma x(s)s$. Каждой стандартной диаграмме Юнга поставим в соответствие элемент

$$c = \sum \pm qp,$$

называемый *симметризатором Юнга*. Здесь p пробегает P, q пробегает Q и знак определяется четностью или нечетностью подстановки q. Если данная диаграмма состоит из одной строки, то оператор c определяет усреднение по группе S; если диаграмма состоит из одного