тождеству:

$$z(s_0 s s_0^{-1}) = z(s)$$

для всякого $s_0 \in S$. Следовательно, размерность линейного пространства $\mathfrak{Z}$ равняется числу классов сопряженных элементов в группе S. Как мы видели в § 34, число таких классов также равняется числу сигнатур. Действительно, если использовать преобразования $s \to s_0 s s_0^{-1}$, то всякая подстановка s может быть приведена к «нормальной форме» вида

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_f,$$

где σ_k означает цикл длины m_k, $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_f$ и числа 1, 2, ..., m расположены под знаком этих циклов в нормальном порядке. В результате мы видим, что элементы ε, ε', ... образуют базис в пространстве $\mathfrak{Z}$. Поскольку $e \in \mathfrak{Z}$, то мы имеем $e = \lambda\varepsilon + \lambda'\varepsilon' + \ldots$ Умножая последовательно на ε, ε', ..., получаем, что $\lambda = \lambda' = \ldots$ $\ldots = 1$. Лемма доказана.

В заключение заметим, что проекторы d, d', ... являются *минимальными проекторами* в X. Это означает, что если $d = d_1 + d_2$, где d_1, d_2 — взаимно ортогональные проекторы, то либо $d = d_1$, либо $d = d_2$. Действительно, согласно определению проекторов d_i, $i = 1, 2$, мы имеем $d_i = dd_id$. С другой стороны, повторяя доказательство пункта 1) из леммы 3, получаем, что всякий элемент $x_0 = dxd$ коллинеарен элементу d. В частности,

$$d_i = \lambda_i d.$$

Поскольку d_i — проектор и d — ненулевой проектор, то числа λ_i могут принимать только значения 0 и 1. Поскольку также $d = d_1 + d_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)d$, то $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Следовательно, $d = d_1$ либо $d = d_2$.

§ 54. Характеристика неприводимых тензоров в терминах симметрии

Вернемся теперь к рассмотрению тензоров для группы $G = \mathrm{GL}(n)$. Роль симметрической группы в изучении тензоров обусловлена тем очевидным фактом, что преобразования этой группы перестановочны с действием

группы G. Отсюда следует, что свойства симметрии по отношению к группе S являются инвариантами по отношению к группе G и могут быть использованы для характеристики инвариантных подпространств. Нашей целью является показать, что этих свойств достаточно также для характеристики неприводимых подпространств.

Условимся записывать $\varphi(Y)$ вместо $\varphi(x, y, \ldots, w)$ и t^Y вместо $t^{i_1 i_2 \cdots i_m}$. Здесь Y означает упорядоченную схему, которая заполнена в первом случае аргументами $x, y, \ldots, w$, а во втором случае — индексами $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Для каждого $s \in S$ положим

$$s\varphi(Y) = \varphi(X_s), \quad st^Y = t^{Y_s}.$$

Нетрудно видеть, что эти определения эквивалентны, т. е. st^Y является тензором коэффициентов преобразованной формы $s\varphi(X)$. При этом мы используем одно и то же обозначение для элемента $s \in S$ и линейного оператора в Φ_m. Соответственно положим

$$c_0 = \sum \pm qp$$

для симметризатора $c_0 = c(Y(\alpha))$. Здесь c_0 уже является линейным оператором в Φ_m. Операторы $c = sc_0s^{-1}$ называются *эквивалентными* симметризатору c_0. Операторы $d, d', \ldots; \varepsilon, \varepsilon', \ldots$ вводятся так же, как и в § 53.

Докажем теперь, что имеет место следующая основная

Теорема 1. *Каждый симметризатор Юнга* $d = \frac{1}{\mu} sc_0s^{-1}$ *проектирует пространство* Φ_m *на неприводимое подпространство со старшим вектором*

$$\omega = s \prod_{k=1}^{n} \omega_k^{r_k}, \quad \alpha = [r_1, r_2, \ldots, r_n],$$

где миноры ω_k *расположены в порядке убывания индексов* k. *Если сигнатура* $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_f)$ *имеет более* n *ненулевых координат, то* $d\Phi_m = (0)$. *Подпространство*

$$\Phi_\alpha = \varepsilon(\alpha)\Phi_m$$

является максимальным подпространством в Φ_m, представление в котором кратно $d(\alpha)$. Нормировочный множитель $\mu = \mu(\alpha)$ и кратность $k(\alpha)$, с которой $d(\alpha)$ содержится в Φ_m, связаны следующим соотношением:

$$\mu(\alpha) \cdot k(\alpha) = m!.$$

Доказательство. Фиксируем сигнатуру $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_f)$. Назовем такую сигнатуру *допустимой*, если $f \leqslant n$. Каждой допустимой сигнатуре α поставим в соответствие старший вектор

$$\omega_0 = \omega_n^{r_n} \omega_{n-1}^{r_{n-1}} \ldots \omega_1^{r_1},$$

где, как обычно, положено $r_i = m_i - m_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $m_{n+1} = 0$ (если $f < n$, то числа $m_{f+1}, \ldots, m_n$ заменяются нулями). Покажем, что вектор ω_0 может быть записан в виде

$$\omega_0 = \boldsymbol{d}_0 \varphi_0,$$

где $\boldsymbol{d}_0 = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{c}_0 = \frac{1}{\mu} \sum \pm \boldsymbol{qp}$ и φ_0 — некоторая форма из пространства Φ_m. Для этого вычислим сначала тензорные коэффициенты формы ω_0.

Напомним, что для всякой формы $\varphi(x, y, \ldots, w)$ коэффициенты $t^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ вычисляются по правилу $t^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m})$. Положим $X = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}\}$. Рассмотрим сначала следующую схему:

$$X^0 = \left\{ \begin{array}{lllll} e_1 & e_1 & e_1 & \ldots & e_1 \\ e_2 & e_2 & \ldots & & \\ \ldots & \ldots & & & \\ e_{n'} & & & & \end{array} \right\},$$

где базисные орты $e_1, e_2, \ldots, e_n$ размещены в соответствии со схемой Юнга (и где $n' \leqslant n$). Подставляя эти аргументы в указанном порядке в форму ω_0, находим, что

$$\omega_0(X^0) = 1.$$

Если к схеме X^0 применить подстановку типа p, то она не изменится. Если к этой схеме применить подстановку

типа q, то одночлен ω_0 умножается на $\operatorname{sgn} q$. В результате

$$\omega_0(X^0_{pq}) = \operatorname{sgn} q.$$

Нетрудно видеть, что во всех остальных случаях $\omega_0(X) = 0$. Действительно, если $X = X^0_{s^{-1}}$, где подстановка s не элементарна, то согласно лемме 2 схема X содержит в некотором столбце два одинаковых орта и соответствующий минор обращается в нуль. Тем более это верно, если $X \neq X^0_s$ ни при каком $s \in S$. В этом случае количественное содержание ортов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в схеме X отлично от случая X^0 и непременно найдется хотя бы один столбец, содержащий два одинаковых орта.

С другой стороны, рассмотрим вспомогательную форму φ_0, определяемую равенствами $\varphi_0(X) = 1$ при $X = X^0$, $\varphi_0(X) = 0$ во всех остальных случаях. Применим к этой форме симметризатор Юнга $\boldsymbol{c}_0$:

$$\boldsymbol{c}_0\varphi_0(X) = \sum \pm \varphi_0(X_{qp}).$$

Ясно, что полученная форма может быть отлична от нуля только при $X = X^0_s$, где s — некоторая подстановка на S. При этом

$$\boldsymbol{c}_0\varphi_0(X^0_s) = \sum \pm \varphi_0(X^0_{sqp}).$$

Согласно определению формы φ_0 в правой части может встретиться отличное от нуля слагаемое только в случае, когда $X^0_{sqp} = X^0$. Но это означает, что $sqp \in P$, т. е.

$$s = p_0 q_0, \qquad q_0 = q^{-1}, \quad p_0 \in P.$$

(Действительно, только в этом случае схема X^0 остается инвариантной.) Наконец, в последнем случае отличны от нуля только те слагаемые, для которых $q^{-1} = q_0$. Суммируя по группе P, получаем в результате

$$\boldsymbol{c}_0\varphi_0(X^0_{pq}) = \lambda \operatorname{sgn} q,$$

где λ — ненулевое число (порядок подгруппы P). В результате имеем $\omega_0 = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{c}_0\varphi_0$. Выбирая другую нормировку для формы φ_0, получаем требуемое равенство: $\omega_0 = d_0\varphi_0$.

Теперь уже нетрудно завершить доказательство теоремы. Поскольку $\boldsymbol{d}_0^2 = \boldsymbol{d}_0$, то $\boldsymbol{d}_0\omega_0 = \boldsymbol{d}_0\varphi_0 = \omega_0$. Полагая $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\sigma}^{-1}\boldsymbol{d}_0\boldsymbol{\sigma}$, $\omega = \boldsymbol{\sigma}^{-1}\omega_0$, получаем, что вектор ω неподвижен относительно $\boldsymbol{d}$. Далее, согласно пунктам 2) и 3) из леммы 3 мы имеем

$$\boldsymbol{d}_0\omega = \boldsymbol{d}_0\,\boldsymbol{d}\omega = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sigma \notin R, \\ \pm\,\omega_0, & \text{если} \quad \sigma \in R. \end{cases}$$

Но это означает, что проектор $\boldsymbol{d}_0$ проектирует все пространство Ω_α на одномерное направление $\boldsymbol{\omega}_0$. Следовательно, также оператор $\boldsymbol{d}$ проектирует Ω_α на одномерное направление $\boldsymbol{\omega}$. Далее возможны следующие два варианта завершения доказательства.

1) Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}$ — центральный симметризатор Юнга, отвечающий сигнатуре α. Поскольку $\boldsymbol{\varepsilon d} = \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d}\omega = \omega$, то мы имеем также $\boldsymbol{\varepsilon}\omega = \omega$. Но это означает, что $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)$ является единичным оператором на Ω_α. Если $\alpha \neq \alpha'$, то мы имеем согласно лемме 4

$$\boldsymbol{\varepsilon}\Omega_{\alpha'} = \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\Omega_{\alpha'} = (0).$$

Следовательно, $\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)$ является проектором на Ω_α во всем пространстве Ω_m. Отсюда следует также, что $\boldsymbol{d}$ является проектором на направление вектора ω во всем пространстве Ω_m. Действительно, при $\alpha \neq \alpha'$ имеем

$$\boldsymbol{d}\Omega_{\alpha'} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{\varepsilon}\Omega_{\alpha'} = (0).$$

Наконец, согласно свойству полноты, даваемому леммой 5, все пространство Ω_m является прямой суммой подпространств Ω_α, отвечающих всевозможным сигнатурам $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_f)$. Если $f > n$, то тензор $\psi = \boldsymbol{d}\varphi$ должен быть антисимметричен по набору индексов, большему n, откуда $\psi = 0$. Следовательно, в этом случае $\Omega_\alpha = (0)$. Наконец, из перестановочности $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ с операторами T_g следует, что $\boldsymbol{d}$ проектирует Φ_m на циклическую оболочку вектора ω и $\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha)$ проектирует Φ_m на циклическую оболочку Ω_α.

2) Вместо леммы 5 мы можем воспользоваться леммой 1, которая независимо дает условие полноты в классе старших векторов. При этом автоматически

учитывается, что следует рассматривать лишь допустимые сигнатуры. Все остальные рассуждения остаются неизменными.

Мы опустили пока соотношение между $k(\alpha)$, $\mu(\alpha)$. Заметим, что оператор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{s}\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{s}^{-1}$ имеет в пространстве Ω_α единственное отличное от нуля однократное собственное значение μ (на векторе ω). Следовательно, $\operatorname{sp}\varepsilon(\alpha) = \frac{1}{\mu^2}\sum \operatorname{sp}\boldsymbol{c} = m!/\mu$. С другой стороны, поскольку $\varepsilon(\alpha)$ — единичный оператор на Ω_α, то $\operatorname{sp}\varepsilon(\alpha) = k(\alpha)$. В результате $\mu(\alpha)k(\alpha) = m!$. Теорема доказана.

Замечание 1. Циклическая оболочка вектора ω относительно группы G может быть определена как совокупность всех тензоров φ, для которых

$$\boldsymbol{d}\varphi = \varphi,$$

где $\boldsymbol{d} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{c} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{s}\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{s}^{-1}$ — соответствующий проектор Юнга. (Соответственно $\boldsymbol{c}\varphi = \mu\varphi$.) Этим свойством характеризуется неприводимое подпространство в Φ_m *).

Замечание 2. Циклическая оболочка подпространства Ω_α относительно группы G может быть охарактеризована как совокупность всех тензоров φ, для которых

$$\varepsilon(\alpha)\varphi = \varphi,$$

где $\varepsilon(\alpha)$ — центральный проектор, отвечающий сигнатуре α. Этим свойством характеризуется максимальное подпространство Φ_α, представление в котором кратно $d(\alpha)$.

Пример. Положим $m = 3$ и рассмотрим диаграмму Юнга

1	3
2	

*) Как следует из замечания 1, тензоры данного неприводимого подпространства обладают свойством антисимметричности: $q\varphi = \pm\varphi$ — по отношению к группе $Q = sQ_0s^{-1}$, где Q_0 — подгруппа вертикальных движений в $Y(\alpha)$.

В этом случае подгруппы P и Q содержат, кроме единичного элемента, лишь по одной транспозиции:

$$p=(1, 3), \quad q=(1, 2).$$

Множество $R = QP$ состоит из четырех элементов: e, q, p, qp, из которых первый и третий четны, а второй и четвертый нечетны. Оператор $\boldsymbol{d}_0$ имеет вид

$$\boldsymbol{d}_0=\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{qp}).$$

Для вычисления μ напомним, что $\mu k = 3! = 6$. В нашем случае $k = 2$ (см. конец § 51). Следовательно, $\mu = 3$. Применяя $\boldsymbol{d}_0$ к произвольному тензору t, получаем тензор

$$\tau^{i_1 i_2 i_3}=\frac{1}{3}(t^{i_1 i_2 i_3}-t^{i_3 i_1 i_3}+t^{i_3 i_2 i_1}-t^{i_2 i_3 i_1}).$$

Заметим, что при вычислении qpt мы меняем местами «предметы» i_3, i_2, стоящие на местах с номерами 1, 2 ($q=(1,2)$). Полученный тензор преобразуется по неприводимому представлению с сигнатурой $\alpha=(2,1)$.

Мы оставили еще нерешенной задачу о явном вычислении кратностей $k=k(\alpha)$. В гл. XII будет дана простая рекуррентная формула для вычисления этой кратности.

§ 55. Принцип взаимности

Аппарат симметризаторов Юнга позволил нам разложить пространство Φ_m на подпространства, неприводимые относительно группы G. Тот же аппарат позволяет решить аналогичную задачу и для самой симметрической группы S, если вместо неприводимых подпространств рассматривать максимальные подпространства, кратные неприводимым. Более глубокий анализ этой ситуации позволяет установить замечательное свойство взаимности, существующее между представлениями G и S.

Заметим вначале, что центральные симметризаторы $\varepsilon(\alpha)$, будучи перестановочны со всеми элементами группы S, определяют в любом представлении этой группы проекторы на инвариантные подпространства. Если