В этом случае подгруппы P и Q содержат, кроме единичного элемента, лишь по одной транспозиции:

$$p=(1, 3), \quad q=(1, 2).$$

Множество $R = QP$ состоит из четырех элементов: e, q, p, qp, из которых первый и третий четны, а второй и четвертый нечетны. Оператор $\boldsymbol{d}_0$ имеет вид

$$\boldsymbol{d}_0=\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{qp}).$$

Для вычисления μ напомним, что $\mu k = 3! = 6$. В нашем случае $k = 2$ (см. конец § 51). Следовательно, $\mu = 3$. Применяя $\boldsymbol{d}_0$ к произвольному тензору t, получаем тензор

$$\tau^{i_1 i_2 i_3}=\frac{1}{3}(t^{i_1 i_2 i_3}-t^{i_3 i_1 i_3}+t^{i_3 i_2 i_1}-t^{i_2 i_3 i_1}).$$

Заметим, что при вычислении qpt мы меняем местами «предметы» i_3, i_2, стоящие на местах с номерами 1, 2 ($q=(1,2)$). Полученный тензор преобразуется по неприводимому представлению с сигнатурой $\alpha=(2,1)$.

Мы оставили еще нерешенной задачу о явном вычислении кратностей $k=k(\alpha)$. В гл. XII будет дана простая рекуррентная формула для вычисления этой кратности.

§ 55. Принцип взаимности

Аппарат симметризаторов Юнга позволил нам разложить пространство Φ_m на подпространства, неприводимые относительно группы G. Тот же аппарат позволяет решить аналогичную задачу и для самой симметрической группы S, если вместо неприводимых подпространств рассматривать максимальные подпространства, кратные неприводимым. Более глубокий анализ этой ситуации позволяет установить замечательное свойство взаимности, существующее между представлениями G и S.

Заметим вначале, что центральные симметризаторы $\varepsilon(\alpha)$, будучи перестановочны со всеми элементами группы S, определяют в любом представлении этой группы проекторы на инвариантные подпространства. Если

представление неприводимо, то лишь один из таких проекторов может оказаться отличным от нуля и сводится в этом случае к единичному оператору в пространстве представления. Если представление группы S обладает этим свойством по отношению к $\varepsilon(\alpha)$, то скажем, что ему *соответствует сигнатура* α.

В частности, пусть, как и прежде, Φ_m — пространство всех тензоров ранга m над некоторым пространством размерности n и Φ_α — область значений в Φ_m проектора $\varepsilon(\alpha)$:

$$\Phi_\alpha = \varepsilon(\alpha)\,\Phi_m.$$

Как следует из теоремы 1, Φ_α является максимальным подпространством, инвариантным относительно $G = \mathrm{GL}(n)$, представление в котором кратно неприводимому представлению $d(\alpha)$. Докажем теперь, что имеет место

Теорема 2. *Пространство Φ_α является максимальным подпространством в Φ_m, в котором представление группы S кратно неприводимому с сигнатурой α. Пространство Φ_α изоморфно тензорному произведению*

$$\Phi_\alpha \approx \mathfrak{R}_\alpha \otimes \Omega_\alpha,$$

где Ω_α — подпространство, натянутое на старшие векторы группы G (с сигнатурой α), и $\mathfrak{R}_\alpha$ — пространство неприводимого представления $d(\alpha)$. Подпространство Ω_α неприводимо относительно S. Пространство Φ_α неприводимо относительно $G \times S$.

Наконец, если $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{S}$ — обертывающие алгебры операторов T_g и s в пространстве Φ_m, то мы имеем

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{S}, \qquad \mathfrak{S}' = \mathfrak{G},$$

где штрих означает переход к коммутаторной алгебре.

Доказательство. Начнем с доказательства последнего утверждения. Согласно теореме 1 алгебра $\mathfrak{S}$ содержит проекторы $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d}'$, ... на подпространства, неприводимые относительно $\mathfrak{G}$ и в сумме дающие Φ_m. Достаточно рассматривать только те проекторы, которые линейно независимы. Кроме того, алгебра $\mathfrak{S}$ содержит переплетающие операторы ($s \in \mathfrak{S}$) для эквивалентных проекторов $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d}'$, ... ($\boldsymbol{d}' = s\boldsymbol{d}s^{-1}$), т. е. для эквивалент-

ных неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{G}$. Отсюда согласно следствию 3 из леммы Шура заключаем, что $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}'$. Но тогда согласно принципу взаимности (§ 21), который мы установили как следствие из теоремы Бернсайда, мы также имеем $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}'$.

Перейдем к рассмотрению пространства Φ_α. Выберем в Ω_α базис из векторов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ и натянем на каждый из этих векторов циклическую оболочку $\mathfrak{R}_i$ относительно алгебры $\mathfrak{G}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда $\mathfrak{R}_i$ изоморфно $\mathfrak{R}_\alpha$ и подпространства $\mathfrak{R}_i$ линейно независимы. Следовательно,

$$\Phi_\alpha \approx \mathfrak{R}_\alpha \otimes \Omega_\alpha.$$

В каждом подпространстве $\mathfrak{R}_i$ выберем базис так, чтобы действие алгебры $\mathfrak{G}$ было идентично в каждом из этих базисов. При этом в силу единственности старшего вектора мы можем считать, что ω является одним из базисных векторов в $\mathfrak{R}_i$. Допустим, что Ω_α приводимо относительно S. Согласно равенству $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}'$ оператор проектирования на инвариантное подпространство является элементом из $\mathfrak{G}$. Ввиду идентичности действия такого оператора на векторы ω_i мы заключаем, что он равняется нулю или единице. Следовательно, Ω_α неприводимо.

Теперь мы можем заключить, что представление группы S в пространстве Φ_α кратно неприводимому представлению, действующему в Ω_α. Действительно, при каждом $g \in G$ пространство $T_g\Omega_\alpha$ неприводимо инвариантно относительно S (ввиду коммутативности G и S) и оператор T_g переплетает представления в Ω_α, $T_g\Omega_\alpha$. Отсюда очевидно также, что Φ_α неприводимо относительно $G \times S$.

Остается доказать свойство максимальности Φ_α. Поскольку Φ_m распадается в прямую сумму подпространств Φ_α, то достаточно проверить, что при $\alpha \neq \alpha'$ неприводимое представление в $\Omega_{\alpha'}$ неэквивалентно представлению в Ω_α. Но эквивалентность таких представлений противоречила бы равенствам $\varepsilon(\alpha) = 0$ на $\Omega_{\alpha'}$, $\varepsilon(\alpha) = 1$ на Ω_α (действительно, $\varepsilon(\alpha)$ является линейной комбинацией операторов представления). Следовательно, Φ_α есть максимальное подпространство, представление

в котором относительно S кратно неприводимому представлению с сигнатурой α. Теорема доказана.

Следствие 1. *Среди линейных комбинаций операторов T_g содержатся все проекторы на подпространства, неприводимые относительно S.*

Следствие 2. *Среди линейных комбинаций операторов T_g содержатся все переплетающие операторы для эквивалентных подпредставлений группы S.*

Аналоги этих утверждений при перемене ролей G и S нам известны уже из предыдущих построений.

Замечание 1. Аппарат симметризаторов Юнга позволяет также получить каноническую реализацию всех неприводимых представлений группы S с помощью (правых) сдвигов в классе функций на группе S. Действительно, полагая

$$\varepsilon(\alpha)\, x(s) = x(s),$$

где $\varepsilon(\alpha)$ интерпретируется как оператор, порожденный левыми сдвигами в групповом кольце функций $x(s)$, мы получаем, как легко проверить, максимальное подпространство X_α, представление в котором кратно неприводимому с сигнатурой α. Аналогично, полагая

$$dx(s) = x(s),$$

где d — симметризатор, «подчиненный» $\varepsilon(\alpha)$, мы получаем более дробное разбиение пространства X_α на подпространства, неприводимые относительно правых сдвигов. Из сравнения числа неприводимых представлений (§ 34) с числом симметризаторов $\varepsilon(\alpha)$ заключаем, что таким путем получаются действительно все неприводимые представления группы S.

Подробности доказательства предоставляются читателю *).

Замечание 2. До сих пор мы рассматривали только контравариантные тензоры относительно G. Тем не менее нам удалось получить сигнатуры, для которых

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n \geqslant 0.$$

---

*) Заметим также, что если $n \geqslant m$, то все неприводимые представления группы $S = \mathrm{S}(m)$ реализуются в классе Φ_m всех тензоров ранга m для группы $G = \mathrm{GL}(n)$.

Для группы $\mathrm{SL}(n)$ такие сигнатуры исчерпывают все возможные сигнатуры. В случае группы $\mathrm{GL}(n)$ для получения всех неприводимых представлений достаточно использовать умножение на скалярные представления $(\det g)^m$. Заметим, что в классе смешанных тензоров положение затрудняется наличием свертки

$$x\xi = x_1\xi^1 + x_2\xi^2 + \ldots + x_n\xi^n,$$

где x — ковариантный и ξ — контравариантный векторы. Однако, в классе чисто ковариантных векторов все построения, по существу, ничем не отличаются от изучения алгебры Φ.

§ 56. Реализация $d(\alpha)$ на прямоугольных матрицах

Опишем еще одну модель неприводимого представления $d(\alpha)$, которая в некотором смысле является промежуточной между реализацией в классе тензоров и реализацией на группе G. Положим $G = \mathrm{GL}(n)$, $H = \mathrm{GL}(m)$, где обе группы рассматриваются над полем комплексных чисел. Пусть X — линейное пространство всех комплексных матриц $m \times n$ и $\mathscr{F}$ — пространство всех полиномов $f(x)$, $x \in X$. Положим

$$T_{gh}f(x) = f(h'xg),$$

где h пробегает H и g пробегает G. Операторы T_{gh} определяют представление группы $G \times H$ в пространстве $\mathscr{F}$. Поскольку однородные полиномы образуют инвариантное подпространство относительно T_{gh}, то, в сущности, нам приходится иметь дело с конечномерными представлениями $G \times H$.

Заметим, что всякое неприводимое представление группы $G \times H$ определяется сдвоенной сигнатурой вида $(\alpha|\beta)$, где α — сигнатура G и β — сигнатура H. Поставим задачу о разложении T_{gh} на неприводимые представления. Полагая $f = \max(n, m)$, мы условимся записывать каждую сигнатуру в виде $(m_1, m_2, \ldots, m_f)$, дополняя, если нужно, недостающие координаты нулями. Положим также $r(\alpha) = m_f$. Докажем, что имеет место

Теорема 3. *Представление в пространстве $\mathscr{F}$ является однократной суммой представлений $G \times H$*