

Для группы $SL(n)$ такие сигнатуры исчерпывают все возможные сигнатуры. В случае группы $GL(n)$ для получения всех неприводимых представлений достаточно использовать умножение на скалярные представления $(\det g)^m$. Заметим, что в классе смешанных тензоров положение затрудняется наличием свертки

$$x\xi = x_1\xi^1 + x_2\xi^2 + \dots + x_n\xi^n,$$

где x — ковариантный и ξ — контравариантный векторы. Однако, в классе чисто ковариантных векторов все построения, по существу, ничем не отличаются от изучения алгебры Φ .

§ 56. Реализация $d(\alpha)$ на прямоугольных матрицах

Опишем еще одну модель неприводимого представления $d(\alpha)$, которая в некотором смысле является промежуточной между реализацией в классе тензоров и реализацией на группе G . Положим $G = GL(n)$, $H = GL(m)$, где обе группы рассматриваются над полем комплексных чисел. Пусть X — линейное пространство всех комплексных матриц $m \times n$ и \mathcal{F} — пространство всех полиномов $f(x)$, $x \in X$. Положим

$$T_{gh}f(x) = f(h'xg),$$

где h пробегает H и g пробегает G . Операторы T_{gh} определяют представление группы $G \times H$ в пространстве \mathcal{F} . Поскольку однородные полиномы образуют инвариантное подпространство относительно T_{gh} , то, в сущности, нам приходится иметь дело с конечномерными представлениями $G \times H$.

Заметим, что всякое неприводимое представление группы $G \times H$ определяется сдвоенной сигнатурой вида $(\alpha|\beta)$, где α — сигнатура G и β — сигнатура H . Поставим задачу о разложении T_{gh} на неприводимые представления. Полагая $f = \max(n, m)$, мы условимся записывать каждую сигнатуру в виде (m_1, m_2, \dots, m_f) , дополняя, если нужно, недостающие координаты нулями. Положим также $r(\alpha) = m_f$. Докажем, что имеет место

Теорема 3. Представление в пространстве \mathcal{F} является однократной суммой представлений $G \times H$

с сигнатурой видом $(\alpha|\alpha)$, $r(\alpha) \geq 0$. Вектор

$$f_\alpha(x) = \prod_{i=1}^k \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{ii} & \dots & x_{ii} \end{vmatrix}^{r_i}, \quad r_i = m_i - m_{i+1}$$

является старшим вектором, отвечающим сигнатуре $(\alpha|\alpha)$, $\alpha = (m_1, m_2, \dots, m_k, 0, 0, \dots, 0)$, $k = \min(n, m)$, $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k \geq 0$.

Доказательство. Заметим, что для матриц $x \in X$ имеет место следующий аналог разложения Гаусса:

$$x = y' \mu z,$$

где $y \in Z(m)$, $z \in Z(n)$ — верхние треугольные матрицы с единицами на главной диагонали и $\mu = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k\}$ — диагональная прямоугольная матрица $m \times n$. Такое разложение справедливо, если

$$M_p \neq 0, \quad p = 1, 2, \dots, k,$$

где M_p — главный диагональный минор матрицы x , составленный из первых p строк и первых p столбцов. Доказательство ничем не отличается от случая $m = n$, рассмотренного в § 9. При этом имеем

$$\mu_p = \frac{M_p}{M_{p-1}}, \quad p = 1, 2, \dots, k, \quad M_0 = 1.$$

Найдем теперь все старшие векторы группы $G \times H$ в пространстве \mathcal{F} . Если $f(x)$ — такой старший вектор, то он является инвариантом $Z(m) \times Z(n)$ и мы имеем

$$f(x) = f(y' \mu z) = f(\mu).$$

Следовательно, f является полиномом от параметров $\mu_p = M_p/M_{p-1}$. Поскольку вектор f должен быть также весовым относительно $D(m) \times D(n)$, то он является одночленом от M_1, M_2, \dots, M_k :

$$f(x) = \prod_{i=1}^k M_i^{r_i}, \quad r_i = m_i - m_{i+1},$$

где $\alpha = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ — сигнтура как относительно левых, так и относительно правых сдвигов на элементы $\delta \in D(m)$, $\delta \in D(n)$. Согласно общим условиям, нало-

женным на сигнатуру, в пространстве \mathcal{F} содержатся лишь такие одночлены, для которых $r_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$; но тогда $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_f \geq 0$ *). Теорема доказана.

Пусть \mathcal{F}_α — циклическая оболочка старшего вектора $f_\alpha(x)$, т. е. пространство неприводимого представления группы $G \times H$. Согласно общей теории представлений (см. § 43) мы имеем

$$\mathcal{F}_\alpha \approx \mathfrak{N}_\alpha^H \otimes \mathfrak{N}_\alpha^G,$$

где \mathfrak{N}_α^H , \mathfrak{N}_α^G — пространства неприводимых представлений H и G , отвечающих сигнатуре α . Следовательно, \mathcal{F}_α может быть также составлено из прямоугольных матриц $M \times N$, $M = \dim \mathfrak{N}_\alpha^H$, $N = \dim \mathfrak{N}_\alpha^G$. Из полученной конструкции очевидно

Следствие 1. Пусть \mathfrak{G} и \mathfrak{h} — линейные оболочки операторов $R_g = T_{ge}$, $L_h = T_{eh}$ соответственно. Тогда мы имеем $\mathfrak{G}' = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{G}$.

Отсюда, как и в предыдущем параграфе, мы можем заключить, что в алгебре \mathfrak{G} содержатся все проекторы на неприводимые подпространства относительно \mathfrak{h} и в алгебре \mathfrak{h} содержатся все проекторы на неприводимые подпространства относительно \mathfrak{G} . Аналогичные утверждения верны и для переплетающих операторов.

Отсюда ясно, как произвести сужение на подгруппу, изоморфную G (либо на подгруппу, изоморфную H). Пространство \mathcal{F}_α кратно неприводимому относительно H с кратностью N и кратно неприводимому относительно G с кратностью M . Здесь, как и выше $M = \dim \mathfrak{N}_\alpha^H$, $N = \dim \mathfrak{N}_\alpha^G$. Рассмотрим специально случай $m = n$.

Следствие 2. Если $m = n$, то пространство \mathcal{F}_α может быть охарактеризовано как линейная оболочка функций

$$\tau_{ij}(x), \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

где $\tau_{ij}^a(x)$ означает полином над X , совпадающий при $\det x \neq 0$ с матричным элементом группы G сигнатуры α .

*) В действительности, если $m = n$, то из условий, наложенных на сигнатуру, еще не вытекает неотрицательность r_n (множитель $M_n = \det x$ может входить в отрицательной степени); но ясно, что $f(x)$ является полиномом только при $r_n \geq 0$.

Действительно, матричные элементы неприводимого представления $\tau^\alpha(g)$ получаются левыми и правыми сдвигами из производящей функции

$$\alpha(g) = \prod_{i=1}^n \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1i} & r_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{ii} & \cdots & g_{ii} & \end{vmatrix}, \quad r_i = m_i - m_{i+1}$$

(см. общую конструкцию таких представлений в гл. VII). Вместе с функцией $\alpha(g)$ все эти матричные элементы продолжаются до полиномов над X . Ясно, что линейная оболочка этих элементов совпадает с пространством \mathcal{F}_α .

Следствие 3. Матричные элементы аналитических неприводимых представлений группы G образуют линейный базис в классе всех полиномов над X , где X — множество всех матриц $n \times n$.

Аналогичное утверждение нетрудно также получить для полиномов от вещественных параметров в пространстве X (т. е. полиномов от x_{ij}, \bar{x}_{ij}); однако при этом приходится рассматривать все вещественные неприводимые представления группы G . Привлекая теорему Вейерштрасса, получаем также свойство полноты в классе непрерывных функций над X : *всякая непрерывная функция над X может быть аппроксимирована линейными комбинациями матричных элементов равномерно на каждом компакте $K \subset X$.* В частности, поскольку $\mathfrak{U} = U(n)$ является компактом, то мы еще раз получаем аппроксимационную теорему Петера — Вейля для $U(n)$.

Если рассматривать полученную конструкцию как построение модели $d(\alpha)$, то ясно, что при $m < n$ мы находим не все возможные представления группы G , при $m > n$ возникает избыток параметров, в то время как случай $m = n$ является оптимальным. Таким образом, мы снова возвращаемся к реализации на группе G .

§ 57. Гармонический осциллятор

В заключение этой главы изложим еще одну замечательную алгебраическую конструкцию, которая первоначально возникла в теоретической физике. Вместо группы G мы будем рассматривать ее алгебру Ли $X = gl(n, C)$.