Действительно, матричные элементы неприводимого представления $\tau^{\alpha}(g)$ получаются левыми и правыми сдвигами из производящей функции

$$\alpha(g)=\prod_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1i} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ g_{i1} & \cdots & g_{ii} \end{vmatrix}^{r_i}, \qquad r_i=m_i-m_{i+1}$$

(см. общую конструкцию таких представлений в гл. VII). Вместе с функцией $\alpha(g)$ все эти матричные элементы продолжаются до полиномов над X. Ясно, что линейная оболочка этих элементов совпадает с пространством $\mathcal{F}_{\alpha}$.

Следствие 3. *Матричные элементы аналитических неприводимых представлений группы G образуют линейный базис в классе всех полиномов над X, где X — множество всех матриц $n\times n$.*

Аналогичное утверждение нетрудно также получить для полиномов от вещественных параметров в пространстве X (т. е. полиномов от x_{ij}, $\bar{x}_{ij}$); однако при этом приходится рассматривать все вещественные неприводимые представления группы G. Привлекая теорему Вейерштрасса, получаем также свойство полноты в классе непрерывных функций над X: *всякая непрерывная функция над X может быть аппроксимирована линейными комбинациями матричных элементов равномерно на каждом компакте $K\subset X$.* В частности, поскольку $\mathfrak{U}=\mathrm{U}(n)$ является компактом, то мы еще раз получаем аппроксимационную теорему Петера — Вейля для $\mathrm{U}(n)$.

Если рассматривать полученную конструкцию как построение модели $d(\alpha)$, то ясно, что при $m<n$ мы находим не все возможные представления группы G, при $m>n$ возникает избыток параметров, в то время как случай $m=n$ является оптимальным. Таким образом, мы снова возвращаемся к реализации на группе G.

§ 57. Гармонический осциллятор

В заключение этой главы изложим еще одну замечательную алгебраическую конструкцию, которая первоначально возникла в теоретической физике. Вместо группы G мы будем рассматривать ее алгебру Ли $X=\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{C})$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n; a_1^+, a_2^+, \ldots, a_n^+$ — образующие в некоторой абстрактной алгебре $\mathfrak{B}$ с соотношениями коммутации

$$[a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0, \quad [a_i^+, a_j] = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Предполагается также, что алгебра $\mathfrak{B}$ содержит единицу. Коммутативные подалгебры, порожденные элементами a_i, a_i^+, обозначим соответственно $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^+$.

Элементы a_i, a_i^+ называют в теоретической физике *операторами Бозе*. Операторы a_i называются *операторами рождения*, операторы a_i^+ — *операторами уничтожения* *). Квадратичный элемент

$$K = a_1 a_1^+ + a_2 a_2^+ + \ldots + a_n a_n^+$$

называется *оператором числа частиц*. Подобная система операторов описывает квантовомеханическую модель, называемую *n-мерным гармоническим осциллятором*. Положим теперь

$$E_{ij} = a_i a_j^+, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Нетрудно проверить, что операторы E_{ij} удовлетворяют стандартным соотношениям коммутации алгебры $X = \mathrm{gl}(n, \boldsymbol{C})$. Таким образом, алгебра X может быть вложена в $\mathfrak{B}$ **).

Далее, пусть $\mathfrak{F}$ — бесконечномерное векторное пространство, в котором действует циклическое представление алгебры $\mathfrak{B}$. При этом предполагается, что роль циклического вектора играет вектор f_0, для которого

$$a_i^+ f_0 = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Иначе говоря, вектор f_0 аннулируется всеми операторами уничтожения. В физике вектор f_0 называется

---

*) Наши обозначения отличаются от общепринятых транспозицией a_i, a_i^+.

**) Полученная запись отвечает интуитивному представлению об операторах E_{ij} как «операторах перехода из „состояния j“ в „состояние i“». Очевидна также аналогия с представлением $d_1 \otimes \widehat{d_1}$ (шляпка означает контрагредиентное представление).

вектором вакуума (*состоянием вакуума*). Условие цикличности записывается следующим образом:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{B} f_0.$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^+$. Иначе говоря, при помощи соотношений коммутации можно каждый элемент $b \in \mathfrak{B}$ разложить по одночленам, у которых все множители a_i сгруппированы слева и множители a_i^+ сгруппированы справа. Но тогда очевидно, что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A} f_0.$$

Следовательно, $\mathfrak{F}$ является циклической оболочкой вектора f_0 по отношению к полиномам $a \in \mathfrak{A}$, содержащим только операторы рождения. При этом существенно, что алгебра $\mathfrak{A}$ является коммутативной.

Как следует из последнего замечания, представления указанного типа действительно существуют. В самом деле, мы можем заранее положить $\mathfrak{F} = \mathfrak{A} f_0$, предполагая, что между векторами

$$f_{k_1 k_2 \ldots k_m} = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n} f_0$$

не существует никаких линейных зависимостей. Иначе говоря, пространство $\mathfrak{F}$ отождествляется с алгеброй $\mathfrak{A}$ всех полиномов от коммутативных символов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Действие операторов a_i, a_i^+ определяется очевидным образом. В дальнейшем мы будем иметь в виду именно указанные представления. Поскольку $X \subset \mathfrak{B}$, то получаем также представление алгебры X.

Займемся разложением этого представления на неприводимые. Прежде всего, заметим, что каждый вектор $f_k = f_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ является весовым:

$$E_{ii} f_k = k_i f_k.$$

Несложная проверка предоставляется читателю. Далее, покажем, что вектор f_k может быть старшим только при условии $k_2 = k_3 = \ldots = k_n = 0$. Действительно, если f_k содержит хотя бы один сомножитель a_j, $j \neq 1$, то он не аннулируется оператором $E_{ij} = a_i a_j^+$. С другой стороны,

если положим

$$\omega_m = a_1^m f_0,$$

то вектор ω_m аннулируется всяким повышающим оператором E_{ij}, $i < j$. Далее, пусть $\mathfrak{F}_m$ — подпространство всех векторов f_k, для которых $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{F}_m$ инвариантно относительно алгебры X. Поскольку $\mathfrak{F}_m$ конечномерно, то оно вполне приводимо *). Поскольку $\mathfrak{F}_m$ содержит лишь единственный (с точностью до множителя) старший вектор ω_m, то оно неприводимо.

Таким образом, мы получаем, что в пространстве $\mathfrak{F}$ содержатся, причем однократно, все неприводимые представления алгебры X с сигнатурами $(m, 0, 0, \ldots, 0)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Этим завершается спектральный анализ пространства $\mathfrak{F}$. Заметим также, что оператор

$$K = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn}$$

сводится в подпространстве $\mathfrak{F}_m$ к умножению на m. Оператор K интерпретируется также как *«массовый оператор»* или *«оператор массы — энергии»*.

Если сопоставить этот результат с рассмотрениями предыдущего параграфа, то не должно показаться удивительным, что мы получили в спектре только представления вида $\boldsymbol{d}_1^m$. Действительно, реализация в пространстве $\mathfrak{F}$ равносильна реализации в классе полиномов от одной числовой строки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если мы желаем получить все остальные сигнатуры, то придется рассматривать по крайней мере n строк (впрочем, для получения сигнатур вида $(m_1, m_2 \ldots, m_k, 0, 0, \ldots, 0)$ достаточно рассматривать k строк).

Исходя из последнего замечания, мы приходим к следующему обобщению нашей конструкции. Будем считать, что алгебра $\mathfrak{B}$ содержит $2n^2$ образующих a_{ij}, a_{ij}^+, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, с соотношениями коммутации

$$[a_{ij}, a_{kl}] = [a_{ij}^+, a_{kl}^+] = 0, \quad [a_{ij}^+, a_{kl}] = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

---

*) Для применения принципа полной приводимости достаточно заметить, что в $\mathfrak{F}_m$ существует скалярное произведение, относительно которого инфинитезимальные операторы подгруппы $U(n)$ антиэрмитовы. (См. упражнение 1 в конце § 36.) См. также § 61.

Алгебра X состоит в этом случае из операторов $E_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}a_{js}^{+}$. При этом, как и прежде, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{+}$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{+}$ порождаются соответственно только элементами a_{ij}, a_{ij}^{+}. Массовый оператор определяется формулой

$$K = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}.$$

Повторяя почти дословно предыдущие построения, получаем бесконечномерное представление алгебры $\mathfrak{B}$ в пространстве $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}f_0$ с циклическим вектором f_0, для которого $a_{ij}^{+}f_0 = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Спектральный анализ этого представления уже не производится столь элементарно, однако достаточно воспользоваться результатом теоремы 3.

В результате получаем новую реализацию всех неприводимых представлений $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n \geqslant 0$ (m_i — целые числа). Хотя такая реализация вполне аналогична реализации предыдущего параграфа, она в отдельных случаях может оказаться более удобной для символической записи действия инфинитезимальных операторов E_{ij}. К этому вопросу мы еще вернемся в гл. X.

Изложенная нами символическая конструкция допускает также весьма простую функциональную реализацию. Для этого достаточно положить

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(x_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right), \quad a_{ij}^{+} = \frac{1}{2}\left(x_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right),$$

где x_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, — независимые вспомогательные переменные. Определяя вектор вакуума по формуле

$$f_0(x) = e^{-\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2},$$

мы отождествляем пространство $\mathfrak{F}$ с пространством всех функций вида $f(x) = p(x)f_0(x)$, где $p(x)$ — произвольный полином от x_{ij} *). При этом массовый оператор K ото-

*) Отсюда очевидна также связь с полиномами Эрмита.

ждествляется с оператором Гамильтона

$$H = \frac{1}{4} \sum_{i,\ j=1}^{n} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_{ij}^2} + x_{ij}^2 \right) - \frac{n^2}{4}$$

для системы из n n-мерных гармонических осцилляторов.

В заключение отметим, что массовый оператор перестановочен со всеми операторами E_{ij} и потому согласно лемме Шура кратен единице в подпространстве каждого неприводимого представления. Однако в общем случае этот оператор уже «не разделяет точек спектра», т. е. принимает одно и то же числовое значение на подпространствах с разными сигнатурами. Действительно, можно показать, что этот оператор сводится к умножению на $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ во всем пространстве однородных полиномов степени m. Фундаментальным вопросом о разделении точек спектра мы займемся в следующей главе.

* * *

Диаграммы Юнга первоначально возникли в связи с непосредственным изучением группы S ([148]). Г. Вейлем [10] показана роль симметризаторов Юнга в изучении тензоров для $\mathrm{GL}(n)$. При этом существенно используется «принцип взаимности» между G и S, при помощи которого получаются основные результаты (включая свойство полной приводимости для тензорных преобразований $\mathrm{GL}(n)$). Наше изложение отличается явным использованием старших векторов, что позволяет получить достаточно ясную картину разложения без помощи группы S (§ 51); однако, лишь привлечение группы S позволяет построить проекторы на неприводимые подпространства. Использование метода Z-инвариантов и доказательство теоремы 3 излагаются согласно [84]. Алгебраическая схема с операторами Бозе была предложена в работах В. Баргмана и М. Мошинского [149], М. Мошинского [155]. См. также [154].