лой $D(x)z = 0$ для всех элементов $x \in \mathfrak{X}$. Множество $\mathfrak{Z}$, очевидно, является подалгеброй в алгебре $\mathfrak{X}$.

Если $x \to \tau(x)$ — представление алгебры X, то всякий оператор $\tau(x)$ является линейной комбинацией операторов $E_i = \tau(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Полагая для краткости

$$E_{i_1 i_2 \ldots i_m} = E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_m},$$

мы ставим в соответствие каждой линейной комбинации элементов $e_{i_1 i_2 \ldots i_m} \in \mathfrak{X}$ линейную комбинацию операторов $E_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ с теми же коэффициентами. Полученное соответствие обозначим по-прежнему символом

$$x \to \tau(x),$$

где, однако, уже $x \in \mathfrak{X}$. Если $z \in \mathfrak{Z}$, то оператор $\tau(z)$ условимся называть *оператором Казимира представления* $\tau(x)$; ясно, что всякий такой оператор перестановочен со всеми операторами $\tau(x)$. Если $\tau(x)$ неприводимо, то в силу леммы Шура

$$\tau(z) = \lambda(z) I,$$

т. е. оператор Казимира кратен единичному. Это свойство операторов Казимира особенно существенно для многих вопросов теории представлений.

§ 59. Операторы Казимира для группы GL(n)

Пусть, в частности, X — алгебра всех комплексных матриц n-го порядка, т. е. алгебра Ли группы $G = \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$. Выбирая в X стандартный базис из элементов e_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, напомним прежде всего, что оператор

$$c_1 = e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn}$$

является (как отмечалось в § 57) одним из операторов Казимира. В этом случае $c_1 \in X$ и оператор c_1 является (как легко проверить) единственным (с точностью до множителя) оператором Казимира, принадлежащим самой алгебре X.

Для построения иных операторов Казимира допустим вначале, что в $\mathfrak{X}$ содержится некоторая система элемен-

тов x_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, которые преобразуются подобно элементам e_{ij} по отношению к присоединенному представлению $D(x)$, т. е. таких, что

$$[e_{ij}, x_{kl}] = \delta_{jk} x_{il} - \delta_{il} x_{kj}.$$

Тогда, очевидно, сумма диагональных элементов x_{ii} будет оператором Казимира в $\mathfrak{X}$. Далее, пусть x_{ij}, y_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, — две такие системы элементов. Положим

$$z_{ij} = x_{ik} y_{kj},$$

где предполагается суммирование по индексу k. Нетрудно проверить, что z_{ij} снова образуют систему указанного типа, и это позволяет нам построить целую серию подобных систем, исходя из базиса системы e_{ij}:

$$e_{ij}^{(m)} = e_{ii_2} e_{i_2 i_3} \ldots e_{i_m j}.$$

Свертывая далее по индексам i, j, получаем серию операторов Казимира:

$$c_m = e_{i_1 i_2} e_{i_2 i_3} \ldots e_{i_m i_1},$$

где предполагается суммирование по каждому индексу $i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, n$. Полученную формулу можно рассматривать как формальное выражение следа для матрицы $\boldsymbol{e}^m$, где $\boldsymbol{e} = \|e_{ij}\|$ — матрица из (некоммутирующих) базисных элементов.

Заметим, что если бы матрица $\boldsymbol{e}$ была числовой, то все степени $\boldsymbol{e}^{n+1}, \boldsymbol{e}^{n+2}, \ldots$ линейно выражались бы через $\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n$ с коэффициентами, полиномиально зависящими от $c_0, c_1, \ldots, c_n$ (следствие формулы Кэли — Гамильтона). В этом случае мы могли бы заключить, что $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ полиномиально выражаются через $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Однако в нашем случае мы не можем сразу заключить о выполнении подобного соотношения.

Отметим также очевидные обобщения использованного нами приема для произвольной алгебры X с универсальной обертывающей алгеброй $\mathfrak{X}$. Прежде всего, имеет место

Правило 1. *Пусть представление $D(x)$ сводится в некоторых инвариантных конечномерных подпространствах $V_1, V_2 \subset \mathfrak{X}$ к контрагредиентным друг другу представлениям $d(x)$, $\hat{d}(x)$. Формула*

$$c = e_\mu e^\mu,$$

где $e_\mu \in V_1$, $e^\mu \in V_2$ — *дуальные базисы по отношению к* ∂, $\widehat{\partial}$, *определяет в этом случае оператор Казимира в алгебре* $\mathfrak{X}$. *Здесь предполагается суммирование по* μ *от* 1 *до* N, *где* $N = \dim V_1 = \dim V_2$.

Действительно, используя «правило дифференцирования», находим

$$D(x)\, c = (\partial(x)\, e_\mu)\, e^\mu + e_\nu (\widehat{\partial}(x)\, e^\nu) = (\partial_{\nu\mu}(x) + \widehat{\partial}_{\mu\nu}(x))\, e_\nu e^\mu = 0$$

в силу равенства $\widehat{\partial} = -\partial'$, выражающего контрагредиентность ∂ и $\widehat{\partial}$. Следовательно, c — центральный элемент.

С другой стороны, согласно определению алгебры $\mathfrak{X}$ представление $D(x)$ является частью представления $\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_m + \ldots$, где $\pi_0(x) \equiv 0$ и

$$\pi_m = \pi \otimes \pi \otimes \ldots \otimes \pi$$

(m сомножителей), причем $\pi_1 = \pi$ означает сужение $D(x)$ на подпространство X. Следовательно, для описания всех операторов Казимира достаточно перечислить все инфинитезимальные инварианты в представлениях π_m, $m = 1, 2, \ldots$ Отсюда, в частности, получаем

Правило 2. *Если представление* π_1 *неприводимо, а* π_m *вполне приводимо при* $m = 2, 3, \ldots$, *то всякий оператор Казимира в алгебре* $\mathfrak{X}$ *есть линейная комбинация операторов вида*

$$c = \varepsilon^k e_k$$

(*сумма по* k *от* 1 *до* n), *где* e_k — *произвольный базис в алгебре* X *и* ε^k — *совокупность элементов, преобразующихся контрагредиентно* e_k *по отношению к* $D(x)$.

Действительно, $\pi_m = \pi_{m-1} \otimes \pi_1$, и для перечисления всех инфинитезимальных инвариантов в π_m достаточно выделить из π_{m-1} все неприводимые компоненты, контрагредиентные π_1.

В частности, если $G = \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$, то представление π_1 является дифференциалом представления

$$x \to gxg^{-1}$$

группы G, действующего в классе всех матриц с нулевым следом. Предоставляем читателю доказать (используя, например, метод Z-инвариантов), что это представление неприводимо. Кроме того, π_m вполне приводимо (как аналитическое представление надкомпактной группы). Следовательно, правило 2 в этом случае применимо. Если $G = \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$, то, очевидно, в этом случае

$$\pi_1 = \pi_0 + \gamma_1,$$

где π_0 — сужение π_1 на подпространство матриц с нулевым следом. Слагаемое γ_1 соответствует найденному ранее оператору Казимира c_1.

Используя правило 2, можно было бы (для случая $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$) показать, что найденные выше операторы Казимира $c_1, c_2, \ldots, c_n$ являются образующими в центре алгебры $\mathfrak{X}$; однако мы это сделаем иным путем в § 61.

Рассмотрим теперь произвольное представление алгебры X и продолжим его до представления всей

алгебры $\mathfrak{X}$ (см. конец § 58). Если оператор E_{ij} соответствует базисному элементу e_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то оператор

$$C_k = E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_3} \ldots E_{i_k i_1}$$

(суммирование по $i_1, i_2, \ldots, i_k$) является оператором Казимира, соответствующим центральному элементу $c_k \in \mathfrak{Z}$. Если, в частности, рассматривать неприводимое представление $d(\alpha)$ с сигнатурой $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, то находим в этом случае

$$C_k = c_k(\alpha) I,$$

где символом $c_k(\alpha)$ обозначена константа, к умножению на которую в данном случае сводится оператор C_k. Таким образом, каждому $c_k \in \mathfrak{Z}$ ставится в соответствие числовая функция $c_k(\alpha) = c_k(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

Поскольку оператор C_k кратен единичному в $d(\alpha)$, то для вычисления $c_k(\alpha)$ достаточно применить C_k к любому фиксированному вектору ξ_0 из пространства представления $d(\alpha)$. Мы можем, в частности, в качестве ξ_0 выбрать *старший вектор*, для которого

$$E_{ii}\xi_0 = m_i \xi_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$E_{ij}\xi_0 = 0 \quad \text{при} \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда непосредственно получаем значение $c_1(\alpha) = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. Для вычисления $c_2(\alpha)$ запишем оператор C_2 в виде суммы трех слагаемых:

$$C_2 = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}^2 + \sum_{i<j} E_{ij}E_{ji} + \sum_{i>j} E_{ij}E_{ji}.$$

Последнее слагаемое этой суммы обращается в нуль на векторе ξ_0. Второе слагаемое с помощью соотношений коммутации может быть приведено к тому же виду с добавочным членом

$$\sum_{i<j} [E_{ij}, E_{ji}] = \sum_{i<j} (E_{ii} - E_{jj}).$$

Заменяя каждый оператор E_{kk} умножением на m_k, получаем следующий результат:

$$c_2(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i^2 + \sum_{i<j} (m_i - m_j).$$

При помощи подобных построений легко находим, что $c_p(\alpha)$ является полиномом от $m_1, m_2, \ldots, m_n$ степени p со старшим членом $\sum_{i=1}^{n} m_i^p$, однако остальные его коэффициенты вычисляются сравнительно сложно.

Поставим теперь задачу о полном описании всех полиномов $c_k(\alpha)$. Заметим, что существенную роль в постановке этой задачи играет то обстоятельство, что все операторы C_k в различных представлениях имеют одинаковую полиномиальную структуру, определяемую символом $c_k \in \mathfrak{Z}$; следовательно, и $c_k(\alpha)$ зависит только от c_k. Поэтому решение данной задачи дает нам также информацию о возможных значениях спектра C_k в произвольном конечномерном представлении алгебры X.

§ 60. Собственные значения операторов C_k

Пусть E_{ij} — инфинитезимальные операторы представления $d(\alpha)$. Вводя обозначение

$$T_{ij} = E_{ij}^{(m)} = E_{ii_2}E_{i_2i_3} \cdots E_{i_mj},$$

докажем вначале, что имеет место

Лемма 1. *Если ξ_0 — старший вектор представления $d(\alpha)$, то*

$$T_{ij}\xi_0 = 0 \quad \text{при} \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$T_{ii}\xi_0 = t_i\xi_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где константа t_i зависит от сигнатуры α.

Доказательство. Напомним, что операторы T_{ij} обладают теми же трансформационными свойствами по отношению к присоединенному представлению, что и E_{ij}. Отсюда следует, как и в § 44, то если ξ — весовой вектор с весом λ, то $T_{ij}\xi$ — также весовой вектор с весом

$$\lambda + \alpha_{ij},$$

где α_{ij} — корень алгебры X, введенный в § 44. Поскольку $\alpha_{ij} > 0$ при $i < j$, то равенство $T_{ij}\xi_0 = 0$ вытекает из максимальности старшего веса *). Поскольку $\alpha_{ii} = 0$, то

*) Короче говоря, оператор T_{ij} является «повышающим» при $i < j$ (и «понижающим» при $i > j$); отсюда $T_{ij}\xi_0 = 0$ при $i < j$.