ного анализа конечномерных представлений, точнее, для перечисления всех неприводимых компонент, входящих в данное представление. Однако практически этот метод слишком сложен *).

§ 62. Полное описание центра для группы GL(n)

Если нас интересует задача о полном описании центра $\mathfrak{Z}$ в универсальной обертывающей алгебре $\mathfrak{X}$, то удобнее всего обратиться к симметризованной форме записи элементов $x \in \mathfrak{X}$. Положим

$$e_{i_1} \circ e_{i_2} \circ \ldots \circ e_{i_m} = P\{e_{i_1 i_2 \ldots i_m}\},$$

где P — оператор симметризации по индексам $i_1, i_2, \ldots, i_m$, введенный в § 58. Полученный символ уже не зависит от порядка расположения индексов $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Напомним, что такие элементы образуют базис в $\mathfrak{X}$.

Умножение с кружочком можно по правилу дистрибутивности продолжить также на любые элементы $x \in \mathfrak{X}$ **). Очевидно, это умножение коммутативно. Если поставить в соответствие каждому элементу $e_{i_1} \circ e_{i_2} \circ \ldots \circ e_{i_m}$ числовое произведение $\xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_m}$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вспомогательные независимые переменные, то мы получаем взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{X}$ и алгеброй $\mathcal{P}$ всех полиномов от $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Для того чтобы это соответствие не зависело от выбора базиса, достаточно предположить, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — ковариантные координаты в самой алгебре X. В этом смысле будем писать $\mathcal{P} = \mathcal{P}(X)$.

Заметим, что введенное соответствие между $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{P}(X)$ является мультипликативным, если под умножением в $\mathfrak{X}$ понимать умножение с кружочком.

---

*) Однажды мы воспользовались этим методом в § 38.

**) При этом мы полагаем по определению

$$(e_{i_1} \circ e_{i_2} \circ \ldots \circ e_{i_m}) \circ (e_{j_1} \circ e_{j_2} \circ \ldots \circ e_{j_l}) = e_{i_1} \circ e_{i_2} \circ \ldots \circ e_{j_l}.$$

Заметим, однако, что $x \circ y \neq \frac{1}{2}(xy + yx)$ для произвольных элементов $x, y \in \mathfrak{X}$.

Выясним теперь, какой подалгебре в $\mathscr{P}(X)$ соответствует центр $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{X}$. Для решения этого вопроса нам будет удобно отказаться от чисто инфинитезимального рассмотрения и считать, что X — алгебра Ли некоторой группы G.

Если в группе G осуществляется внутренний автоморфизм $h \to ghg^{-1}$, то этот автоморфизм вызывает также преобразование $x \to \rho(g)x$ в классе касательных векторов $x \in X$. В частности, если G — матричная группа, то

$$\rho(g)x = gxg^{-1}, \qquad x \in X.$$

Подставляя в это выражение $g = \exp ty$, $y \in X$, и разлагая правую часть в степенной ряд по t, получаем, что

$$\rho(\exp ty) = 1 + tD(y) + \ldots,$$

т. е. представление $D(y)$ является главной линейной частью (дифференциалом) $\rho(g)$. Представление $\rho(g)$ называется *присоединенным представлением* группы G.

Если $\xi = \{\xi_i\}$ — ковариантные координаты в алгебре X, то представление $\rho(g)$ вызывает также преобразование $\xi \to \xi_g$ в классе этих координат. Формула

$$T_g p(\xi) = p(\xi_g)$$

определяет представление группы G в алгебре $\mathscr{P}(X)$. Если рассматривать только линейные формы $p(\xi)$, то они преобразуются контравариантно и представление T_g совпадает в данном случае с представлением $\rho(g)$. Следовательно, T_g продолжает $\rho(g)$ на алгебру $\mathscr{P}(X)$.

Вычислим дифференциал представления T_g. Если $p(\xi)$ — линейная форма, то, как мы знаем, этим дифференциалом является $D(x)$. В общем случае мы вычисляем инфинитезимальные операции представления T_g по индукции как производные в точке $g = e$ от произведения некоторого числа линейных форм. В силу «правила дифференцирования», введенного в § 58, это приводит к тому же результату, что и определение $D(x)$ в алгебре $\mathfrak{X}$. Следовательно, $D(x)$ в алгебре $\mathfrak{X}$ является дифференциалом T_g.

Замечание. Из полученного результата, в частности, следует что представление $D(x)$ совпадает с представлением

$$\pi_0 + \pi_1 + \sigma(\pi_2) + \ldots + \sigma(\pi_m) + \ldots,$$

где $\sigma(\pi_m)$ — симметризованная часть представления $\pi_m = \pi \otimes \pi \otimes \ldots \ldots \otimes \pi$ (m сомножителей). Эта запись уточняет замечание, сделанное в § 59.

Напомним теперь, что $\mathfrak{Z}$ состоит по определению из всех инфинитезимальных инвариантов $D(x)$. Следовательно, $\mathfrak{Z}$ есть совокупность всех инвариантов представления T_g. Сформулируем полученный результат в виде следующей общей теоремы:

Теорема 4. *Взаимно однозначное соответствие между алгеброй $\mathfrak{X}$ и алгеброй $\mathscr{P}(X)$ всех полиномов $p(\xi)$ от ковариантных координат в алгебре X приводит к соответствию между центром $\mathfrak{Z}$ и алгеброй всех полиномов, инвариантных относительно присоединенного представления в X.*

В частности, если X — алгебра Ли группы GL(n), то всякий элемент $x \in X$ записывается в виде $x^{ij}e_{ij}$, где e_{ij} — стандартный базис, и всякая линейная форма $p \in \mathscr{P}(X)$ записывается в виде $p(\xi) = x^{ij}\xi_{ij} = \operatorname{sp} x\xi$, где матрица $\xi = \|\xi_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, составлена из вспомогательных переменных, заменяющих базис e_{ij}. Преобразование $x \to gxg^{-1}$ контрагредиентно преобразованию $\xi \to g^{-1}\xi g$ в классе переменных ξ. Следовательно,

$$T_g p(\xi) = p(g^{-1}\xi g)$$

в классе всех полиномов $p(\xi)$ от переменных $\xi = \|\xi_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. При этом рассматриваются только «аналитические» полиномы $p(\xi)$ (зависящие от ξ_{ij}, но не от $\bar{\xi}_{ij}$).

Задача описания центра $\mathfrak{Z}$ сводится теперь к задаче описания всех решений системы уравнений

$$p(g^{-1}\xi g) = p(\xi)$$

в классе полиномов $p(\xi)$. В частности, такими полиномами являются элементы

$$k_m(\xi) = \operatorname{sp} \xi^m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Известно *), что любой инвариантный полином $p(\xi)$ является в этом случае полиномом от $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Иначе говоря, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ являются образующими в алгебре $\mathscr{P}_0$ всех инвариантных полиномов.

Возвращаясь от переменных ξ_{ij} снова к базисным элементам e_{ij}, получаем

Следствие 1. *Операторы Казимира*

$$k_m = \operatorname{sp} e^m = e_{i_1 i_2} \circ e_{i_2 i_3} \circ \ldots \circ e_{i_m i_1}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n,$$

являются образующими центра $\mathfrak{Z}$ *в случае группы* $\mathrm{GL}(n)$.

Заметим теперь, что полиномы k_m и c_m имеют одинаковую старшую компоненту:

$$[k_m] = [c_m],$$

где символ $[x]$ был введен в § 58 для элементов $x \in \mathfrak{X}$. Действительно, оба эти полинома принимают одно и то же значение при формальной подстановке ξ_{ij} вместо e_{ij}. Отсюда ясно, что системы k_m, c_m, $m = 0, 1, \ldots, n$, выражаются друг через друга полиномиально и рекуррентно. В результате получаем также

Следствие 2. *Операторы Казимира* c_m, $m = 1, 2, \ldots, n$, *также являются образующими центра* $\mathfrak{Z}$ *в случае группы* $\mathrm{GL}(n)$.

Последнее утверждение представляет для нас интерес хотя бы в том отношении, что свойства симметрии, найденные нами в § 60, переносятся теперь на произвольный оператор Казимира $z \in \mathfrak{Z}$:

Следствие 3. *Собственное значение* $z(\alpha)$ *всякого оператора Казимира* $z \in \mathfrak{Z}$ *является симметрическим полиномом от параметров* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ $(l_i = m_i + (n - i)$, $i = 1, 2, \ldots, n)$.

§ 63. Правило циклов

В заключение этой главы предложим еще один метод вычисления собственных значений операторов Казимира, который, в отличие от метода теоремы 2, специально

*) См., например, [10]. В § 75 мы докажем это утверждение независимо.