

Известно *), что любой инвариантный полином $p(\xi)$ является в этом случае полиномом от k_1, k_2, \dots, k_n . Иначе говоря, k_1, k_2, \dots, k_n являются образующими в алгебре \mathcal{P}_0 всех инвариантных полиномов.

Возвращаясь от переменных ξ_{ij} снова к базисным элементам e_{ij} , получаем

Следствие 1. *Операторы Казимира*

$$k_m = \operatorname{sp} e^m = e_{i_1 i_2} \circ e_{i_2 i_3} \circ \dots \circ e_{i_m i_1}, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

являются образующими центра \mathfrak{Z} в случае группы $\operatorname{GL}(n)$.

Заметим теперь, что полиномы k_m и c_m имеют одинаковую старшую компоненту:

$$[k_m] = [c_m],$$

где символ $[x]$ был введен в § 58 для элементов $x \in \mathfrak{X}$. Действительно, оба эти полинома принимают одно и то же значение при формальной подстановке ξ_{ij} вместо e_{ij} . Отсюда ясно, что системы $k_m, c_m, m = 0, 1, \dots, n$, выражаются друг через друга полиномиально и рекуррентно. В результате получаем также

Следствие 2. *Операторы Казимира $c_m, m = 1, 2, \dots, n$, также являются образующими центра \mathfrak{Z} в случае группы $\operatorname{GL}(n)$.*

Последнее утверждение представляет для нас интерес хотя бы в том отношении, что свойства симметрии, найденные нами в § 60, переносятся теперь на произвольный оператор Казимира $z \in \mathfrak{Z}$:

Следствие 3. *Собственное значение $z(\alpha)$ всякого оператора Казимира $z \in \mathfrak{Z}$ является симметрическим полиномом от параметров l_1, l_2, \dots, l_n ($l_i = m_i + (n - i)$, $i = 1, 2, \dots, n$).*

§ 63. Правило циклов

В заключение этой главы предложим еще один метод вычисления собственных значений операторов Казимира, который, в отличие от метода теоремы 2, специально

*) См., например, [10]. В § 75 мы докажем это утверждение независимо.

приспособлен для работы с *симметризованными* операторами Казимира. Развитие нового метода представляет интерес по той причине, что явная связь между изученными ранее операторами c_1, c_2, \dots, c_n и симметризованными операторами k_1, k_2, \dots, k_n практически является довольно сложной. Впрочем, вместо операторов k_1, k_2, \dots, k_n нам будет удобнее рассматривать иную базисную систему операторов Казимира.

Используя снова вспомогательную числовую матрицу $\xi = \|\xi_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, мы рассмотрим ее характеристический полином

$$j(\lambda, \xi) = \det(1 - \lambda \xi) = 1 - \lambda j_1 + \lambda^2 j_2 - \dots \pm \lambda^n j_n,$$

коэффициенты которого выражаются хорошо известными формулами через диагональные миноры матрицы ξ :

$$j_m(\xi) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} \begin{vmatrix} \xi_{i_1 i_1} & \cdots & \xi_{i_1 i_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{i_m i_1} & \cdots & \xi_{i_m i_m} \end{vmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Полином $j(\lambda, \xi)$, а вместе с ним и его коэффициенты $j_m(\xi)$ являются инвариантами относительно присоединенного представления $\xi \rightarrow g^{-1} \xi g$; более того, как известно, полиномы $j_1(\xi), j_2(\xi), \dots, j_m(\xi)$ являются образующими в алгебре \mathcal{P}_0 . Следовательно, мы получаем возможность рассматривать новые операторы Казимира:

$$j_m = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} \begin{vmatrix} e_{i_1 i_1} & \cdots & e_{i_1 i_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{i_m i_1} & \cdots & e_{i_m i_m} \end{vmatrix}^\circ, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

которые являются образующими в алгебре \mathcal{P}_0 . Кружочек над знаком детерминанта означает при этом, что отдельные одночлены, возникающие при раскрытии детерминанта, вычисляются как коммутативные произведения с кружочком, например:

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}^\circ = e_{11} \circ e_{22} - e_{12} \circ e_{21}.$$

В дальнейшем мы укажем простую явную связь между образующими j_1, j_2, \dots, j_n и образующими k_1, k_2, \dots, k_n . Наряду с операторами j_1, j_2, \dots, j_n мы можем рассматривать также их линейную комбинацию

$$j(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda e_{11} & -\lambda e_{12} & \dots & -\lambda e_{1n} \\ -\lambda e_{21} & 1 - \lambda e_{22} & \dots & -\lambda e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda e_{n1} & -\lambda e_{n2} & \dots & 1 - \lambda e_{nn} \end{vmatrix}^{\circ}.$$

Полином $j(\lambda)$ будем называть *производящим полиномом* операторов Казимира. Переходя от абстрактных операторов к операторам представления, заменяем символы $e_{ij}, j_m, j(\lambda)$ соответствующими заглавными символами $E_{ij}, J_m, J(\lambda)$.

Полагая, в частности, $m = n$, мы рассмотрим оператор Казимира

$$J_n = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \dots & E_{nn} \end{vmatrix},$$

от которого оператор $J(\lambda)$ отличается лишь несущественной заменой E_{ij} на $\delta_{ij} - \lambda E_{ij}$. Раскрывая этот детерминант, замечаем, что каждое его слагаемое имеет вид

$$\pm E_{1i_1} \circ E_{2i_2} \circ \dots \circ E_{ni_n},$$

где (i_1, i_2, \dots, i_n) — произвольная подстановка индексов $1, 2, \dots, n$ (знак определяется четностью или нечетностью этой подстановки). Поскольку умножение коммутативно, мы можем сгруппировать сначала сомножители вида $E_{1i_1} E_{1i_2} \dots E_{1i_k}$, затем сомножители вида $E_{si_1} E_{1i_2} \dots E_{1i_s}$, где s — один из индексов, не содержащихся в первой цепочке, и т. д., что равносильно разбиению исходной подстановки на отдельные циклы. Введем теперь

Определение. Произведение вида

$$Z_{i_1 i_2 \dots i_p} = E_{i_1 i_2} \circ E_{i_2 i_3} \circ \dots \circ E_{i_p i_1},$$

где среди индексов i_1, i_2, \dots, i_p нет одинаковых, назовем циклом. Число p назовем длиной этого цикла *).

В частности, мы видим, что всякий детерминант Казимира является полиномом от циклов по отношению к умножению с кружочком; при этом перемножаемые циклы никогда не содержат общих индексов и потому *взаимно перестановочны*. Для наших целей существенно, что в произвольной ассоциативной алгебре \mathfrak{X} имеет место следующее

Правило умножения. Если базисные элементы, входящие в два разных одночлена

$$A_k = e_{i_1} \circ e_{i_2} \circ \dots \circ e_{i_{f_k}} = \frac{1}{f_k!} (e_{i_1 i_2 \dots i_{f_k}} + \dots),$$

$k = 1, 2, \dots, m$, взаимно перестановочны, то эти одночлены также перестановочны, причем

$$A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_m = A_1 A_2 \dots A_m.$$

Иначе говоря, для одночленов A_1, A_2, \dots, A_m умножение с кружочками равносильно обычному умножению.

Действительно, согласно определению умножения с кружочком имеем

$$A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_m = \frac{1}{f!} (e_{i_1 i_2 \dots i_f} + \dots),$$

где $f = f_1 + f_2 + \dots + f_m$ и сумма распространяется на все $f!$ перестановок сомножителей $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_f}$. Условимся считать два слагаемых в этой сумме эквивалентными, если они получаются друг из друга перестановкой лишь тех сомножителей, которые входят в один и тот же одночлен A_k . Ясно, что каждый класс эквивалентности имеет $v = f_1! f_2! \dots f_m!$ слагаемых и число различных классов есть $f!/v$. При вычислении суммы слагаемых каждого класса мы можем воспользоваться перестановочностью сомножителей, входящих в разные одночлены A_k , и расположить на первых f_1 местах

*) Заметим, что цикл не меняется при циклической перестановке индексов i_1, i_2, \dots, i_p (ибо умножение с кружочками коммутативно). Заметим также, что здесь, в отличие от записи § 59, не предполагается суммирование по индексам i_1, i_2, \dots, i_p .

сомножители из A_1 , на следующих f_2 местах — сомножители из A_2 и т. д. При этом согласно определению эквивалентности на каждом из этих отрезков встречается по одному разу всякая возможная перестановка сомножителей данной группы. Следовательно, искомая сумма S может быть записана в виде произведения $S_1 S_2 \dots S_m$, где

$$S_k = (e_{i_1 i_2 \dots i_{f_k}} + \dots) = f_k! A_k.$$

Следовательно, каждый класс эквивалентности дает один и тот же вклад, равный S , и общая сумма вкладов есть $f! / v \cdot S = f! A_1 A_2 \dots A_m$. Производя деление на $f!$, входящее в символ $A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_m$, получаем нужный результат. Отсюда, в частности, имеем

Следствие. Всякий детерминант Казимира является полиномом от циклов по отношению к обычному умножению.

Фиксируя некоторый цикл и применяя его к старшему вектору ξ_0 , замечаем, что действие цикла добавляет к каждому весу слагаемое вида $a_{i_1 i_2} + a_{i_2 i_3} + \dots + a_{i_p i_1} = 0$. Следовательно, вес не изменяется и, в частности,

$$Z\xi_0 = \lambda \xi_0$$

для каждого цикла Z . Покажем теперь, что собственное значение λ для каждого цикла Z может быть сравнительно просто выражено в явном виде

Условимся считать, что $\rho = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ — циклическая система индексов, т. е. такая, в которой номер ρ считается предшествующим номеру 1, и пусть ρ' — линейная цепочка тех же индексов, распределенных в новом порядке. Фиксируем целое число k и будем использовать символы α , β для чисел $\leq k$ и $> k$. Скажем, что ρ' — инверсная цепочка порядка k , если

1° для каждой пары соседних индексов в ρ вида (i, β) индекс i встречается в ρ' ранее β ;

2° для каждой пары соседних индексов в ρ вида (j, α) индекс α встречается в ρ' ранее j .

При этом индексы i, j могут быть как типа α , так и типа β . Из этого определения, в частности, следует, что

всякая цепочка из ρ вида $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ сохраняет свой порядок следования в ρ' , а цепочка вида $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)$ меняет порядок следования на обратный *). Пусть n_k — число всех инверсных цепочек порядка k .

Докажем теперь, что имеет место

Теорема 5. Собственное значение каждого цикла Z на старшем векторе представления $d(\alpha)$ есть линейная функция от сигнатуры α . Если $Z = Z_{i_1 i_2 \dots i_p}$, то собственное значение этого цикла имеет вид

$$z_{i_1 i_2 \dots i_p} = \frac{1}{p!} \{ m_{j_1} - v_2 m_{j_2} + v_3 m_{j_3} - \dots \pm m_{j_p} \},$$

где j_1, j_2, \dots, j_p — расположение индексов i_1, i_2, \dots, i_p в порядке возрастания, $\alpha = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $p \leq n$ и коэффициенты v_k вычисляются по формуле

$$v_k = n_{k-1} + n_k,$$

где n_k — число инверсных цепочек порядка k , построенных по системе (i_1, i_2, \dots, i_p) .

Доказательство. Пусть N — произвольное слагаемое в цикле Z ; докажем, что собственное значение N на старшем векторе ξ_0 является линейной функцией от α . Действительно, это верно, если цикл имеет длину 1. В общем случае заметим, что среди сомножителей одночлена N всегда содержится хотя бы один повышающий оператор $E = E_{ij}$. Записывая N в виде $N_1 EN_2$, где N_1, N_2 — дополнительные сомножители, переставим местами E и N_2 :

$$N = N_1 N_2 E + N_1 [E, N_2].$$

Очевидно, первое слагаемое этой суммы аннулирует старший вектор ξ_0 . Далее, нетрудно видеть, что второе слагаемое всегда представляется в виде разности двух одночленов, имеющих степень однородности $p-1$ и содержащихся в некоторых циклах длины $p-1$ **). Следовательно, наше утверждение доказывается по индукции.

Ввиду доказанного свойства линейности мы можем для каждой сигнатуры $\alpha = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ представить искомое собственное значение в виде

$$z_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{k=1}^n z_k r_k,$$

*). Однако индексы, соседние в ρ , не обязаны быть соседними в ρ' . (В частности, в цепочке ρ' индексы $\alpha_i, \beta_j, i = 1, 2, \dots, t, j = 1, 2, \dots, s$, могут чередоваться.)

**). Если $Z = Z_{i_1 i_2 \dots i_p}$, то эти циклы получаются вычеркиванием одного из индексов i, j в системе (i_1, i_2, \dots, i_p) .

где z_k — такое же собственное значение в базисном представлении \mathbf{d}_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Реализуем представление \mathbf{d}_k в классе функций от k векторов-строк $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и условимся использовать сокращенное обозначение

$$[i_1, i_2, \dots, i_k] = \begin{vmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \dots & x_{i_k} \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{i_1} & u_{i_2} & \dots & u_{i_k} \end{vmatrix}$$

для произвольного минора k -го порядка, составленного из этих строк. В частности, минор $\omega_k = [1, 2, \dots, k]$ является старшим вектором представления \mathbf{d}_k . Поскольку преобразования группы G сводятся к умножению векторов x, y, \dots, u справа на $g \in G$, легко находим, что в этом случае

$$E_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + y_i \frac{\partial}{\partial y_j} + \dots + u_i \frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Применение такого оператора к минору $[i_1, i_2, \dots, i_k]$ равносильно замене индекса j под знаком минора на индекс i (либо обращению в нуль этого минора, если j не содержится среди индексов i_1, i_2, \dots, i_k). Мы получаем удобную схему для применения инфинитезимальных операторов E_{ij} .

Рассмотрим теперь систему операторов $\Gamma_{i_1} = E_{i_1 i_2}, \Gamma_{i_2} = E_{i_2 i_3}, \dots, \Gamma_{i_p} = E_{i_p i_1}$, входящих в определение цикла Z , и вычислим действие на вектор ω_k произвольного одночлена вида

$$N = \Gamma_{s_1} \Gamma_{s_2} \dots \Gamma_{s_p},$$

где $\rho' = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ — подстановка индексов $\rho = (i_1, i_2, \dots, i_p)$. Нетрудно видеть, что $N\omega_k \neq 0$ только в том случае, когда ρ' — инверсная цепочка порядка k . Действительно, допустим, что применение операторов Γ_s в указанном порядке приводит после некоторого числа шагов к ненулевому минору ω . Пусть символы α, β относятся соответственно к числам $\leq k$ и $> k$. Дальнейшее применение оператора $\Gamma_{i_m} = E_{i_m i_{m+1}}$ может привести к нулевому результату только в следующих случаях: 1) пара (i_m, i_{m+1}) имеет вид (β, β') , и оператор $\Gamma_{\beta'}$ стоит левее Γ_{β} (т. е. индекс β' еще не появился на схеме ω); 2) пара (i_m, i_{m+1}) имеет вид (β, α) , и оператор Γ_{α} стоит правее Γ_{β} (т. е. индекс α уже смешен со схемы ω); 3) пара (i_{m-1}, i_m) имеет вид (i, α) , и оператор Γ_i стоит левее Γ_{α} (в этом случае индекс α еще не смешен со схемой ω и применение Γ_{α} приводит к появлению двух одинаковых столбцов под знаком минора ω). Но все эти случаи исключаются, если ρ' — инверсная цепочка. Применение оператора N к вектору ω_k приводит в этом случае к циклической перестановке

всех индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, входящих как в цепочку (i_1, i_2, \dots, i_p) , так и в схему ω_k . Следовательно,

$$Z\omega_k = \frac{(-1)^{q-1}}{p!} n_k \omega_k,$$

где функция n_k и функция $q = q(k)$ имеют, очевидно, скачки только в точках i_1, i_2, \dots, i_p (причем $q(k)$ меняется ровно на единицу). Заметим также, что $n_m = n_{M-1} = 1$, где $m = \min(i_1, i_2, \dots, i_p)$ и $M = \max(i_1, i_2, \dots, i_p)$, и также $n_{M+\delta} = 0$ при $\delta \geq 0$; кроме того, $q(m) = 1$. Располагая индексы i_1, i_2, \dots, i_p в возрастающем порядке j_1, j_2, \dots, j_p , находим, что $z_{i_1 i_2 \dots i_p}$ разлагается только по функциям вида

$$r_j + r_{j+1} + \dots + r_{j'} = m_j - m_{j'},$$

где $j = j_k$, $j' = j_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, p-1$. Отсюда легко получается формула, указанная в условиях теоремы. Теорема доказана.

Пример 1. Если $p = 1, 2$ и 3 , то соответствующее собственное значение не зависит, как легко проверить, от порядка индексов и имеет вид $z_i = m_i$; $z_{ij} = \frac{1}{2} (m_i - m_j)$, $i < j$; $z_{ijk} = \frac{1}{6} (m_i - 2m_j + m_k)$, $i < j < k$.

Пример 2. Если $Z = Z_{12 \dots p+1}$, то числа $1, 2, \dots, k$ относятся к типу α , а $k+1, \dots, p+1$ — к типу β . Подстановка ρ' является инверсной, если k стоит на первом, $p+1$ — на последнем месте, а остальные $p-1$ чисел распределяются между ними как угодно, но с убыванием чисел типа α и с возрастанием чисел типа β . Ясно, что в этом случае $n_k = C_{p-1}^{k-1}$, где C_k^l — число сочетаний из k по l , и мы находим

$$z_{12 \dots p+1} = \frac{1}{(p+1)!} \left\{ m_1 - pm_2 + \frac{p(p-1)}{2} m_3 - \dots \pm m_{p+1} \right\}.$$

Полученное выражение есть конечная разность p -го порядка, построенная из чисел m_1, m_2, \dots, m_{p+1} .

Пример 3. Для вычисления собственного значения $j_2(\alpha)$ мы раскрываем миноры под знаком оператора J_2 :

$$J_2 = \sum_{i < j} \begin{vmatrix} E_{ii} & E_{ij} \\ E_{ji} & E_{jj} \end{vmatrix}^\circ = \sum_{i < j} (Z_i Z_j - Z_{ij}),$$

и заменяем каждый цикл Z_i, Z_{ij} соответствующим собственным значением (пример 1); в результате получим

$$j_2(a) = \sum_{i < j} m_i m_j - \frac{1}{2} \sum_{i < j} (m_i - m_j).$$

Аналогично вычисляем также и функцию $j_3(a)$:

$$\begin{aligned} j_3(a) = & \sum_{i < j < k} m_i m_j m_k - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \left\{ (m_i - m_j) m_k + \right. \\ & \left. + (m_j - m_k) m_i + (m_k - m_i) m_j \right\} + \frac{1}{3} \sum_{i < j < k} (m_i - 2m_j + m_k). \end{aligned}$$

В общем случае естественно сразу рассматривать J_n . Если n не слишком велико, то «правило циклов», даваемое теоремой 5, позволяет легко подсчитать функцию $j_n(a)$. Если в операторе J_n заменить каждый цикл Z_i длины 1 оператором $1 - \lambda Z_i$ и каждый цикл $Z_{i_1 i_2 \dots i_p}$ длины $p > 1$ — оператором $(-\lambda)^p Z_{i_1 i_2 \dots i_p}$, то отсюда непосредственно получаем собственное значение $j(a, \lambda)$ производящего полинома $J(\lambda)$. Отсюда разложением по λ находим все остальные функции j_m , $m = 1, 2, \dots, n$.

В заключение заметим, что между характеристическим полиномом числового матрицы ξ и следами ее степеней существует хорошо известное соотношение, перфразируя которое на язык операторов Казимира получаем тождество *)

$$- \frac{j'(\lambda)}{j(\lambda)} = k_1 + \lambda k_2 + \dots + \lambda^m k_m + \dots,$$

где $j'(\lambda)$ — производная по λ и в правой части стоит формальный степенной ряд. Отсюда, умножая на $j(\lambda) = 1 - \lambda j_1 + \dots \pm \lambda^n j_n$, находим рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} j_1 &= k_1, \\ -2j_2 &= -j_1 k_1 + k_2, \\ 3j_3 &= -j_2 k_1 - j_1 k_2 + k_3, \dots \end{aligned}$$

*) См. [10], стр. 61. Поскольку все рассматриваемые величины вполне определяются своими значениями на диагональных матрицах ξ , мы можем считать, что $j(\lambda, \xi) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda \xi_i)$, откуда легко получается нужное тождество.

Те же формулы имеют место при замене элементов $j(\lambda)$, j_m , k_m соответствующими собственными значениями $j(\alpha, \lambda)$, $j_m(\lambda)$, $k_m(\lambda)$. В частности, зная $j(\alpha, \lambda)$, мы находим значения $k_m(\alpha)$ как коэффициенты аналитической функции — $j'(\alpha, \lambda)/j(\alpha, \lambda)$.

Очевидно, величины $j_m(\alpha)$, $m = 1, 2, \dots, n$, равно как и $k_m(\alpha)$, $m = 1, 2, \dots, n$, «разделяют» систему неприводимых представлений группы $GL(n)$.

* * *

Квадратичные операторы, перестановочные с элементами универсальной обертывающей алгебры \mathfrak{X} , были впервые введены Казимиром [93] для чисто алгебраического решения вопроса о полной приводимости конечномерных представлений. В дальнейшем подобные операторы, уже не обязательно квадратичные, стали называть «операторами Казимира» или «операторами Лапласа». Общий метод описания алгебры этих операторов в терминах полиномов, инвариантных относительно присоединенного представления, был предложен И. М. Гельфандом [64]. Мы приводим все эти конструкции в общем виде (с иллюстрацией на примере $GL(n)$); полученными результатами воспользуемся в дальнейшем при изучении произвольной компактной группы Ли.

При вычислении собственных значений операторов Казимира мы используем традиционный метод (применение к старшемуектору), который неоднократно применялся математиками и физиками. В изложении § 60 мы следовали результатам недавней работы А. М. Перецеломова и В. С. Попова [122]; заметим, что эта работа была стимулирована вниманием физиков-теоретиков к операторам Казимира. Симметрия относительно перестановок возникает при этом несколько неожиданно (следствие 1 из теоремы 2). В дальнейшем будет указано иное доказательство свойства симметрии (§ 126). Рассмотрение детерминантов Казимира и «правило циклов» были предложены (без доказательства) в лекциях автора [21]; здесь мы излагаем этот метод несколько подробнее, с исправлением неточностей, допущенных в [21]. В § 126 будет описан еще один общий метод вычисления собственных значений операторов Казимира.