ГЛАВА X

ИНДИКАТОРНЫЕ СИСТЕМЫ И БАЗИС ГЕЛЬФАНДА — ЦЕЙТЛИНА

В предыдущей главе мы слегка отклонились в сторону от задачи изучения неприводимых представлений $d(\alpha)$; вернемся теперь к этому вопросу. Среди известных нам моделей $d(\alpha)$ мы отдаем предпочтение реализации на группе Z, которая включает минимальное число независимых параметров; однако эта реализация страдает пока существенным недостатком, поскольку для пространства представления мы имеем лишь малоэффективную характеристику (циклическая оболочка старшего вектора). Желательно было бы и в этом случае построить аналог симметризаторов Юнга.

Решение этой задачи дается в § 65. В дальнейших параграфах полученная информация используется для изучения «внутренней структуры» и построения базиса в пространстве представления $d(\alpha)$. При этом мы выписываем явную формулу для инфинитезимальных операторов в найденном базисе. Дается также общая формула для матричных элементов $d(\alpha)$.

§ 64. Операторы левого сдвига на группе Z *)

Нам будет удобно начать с реализации на группе G. Напомним, что при выборе этой реализации мы осуществили специальное вложение $d(\alpha)$ в правое регулярное представление группы G; при этом векторы в пространстве представления оказываются функциями на группе G и, в частности, роль старшего вектора играет функция

$$\alpha(g) = \prod_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1i} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{i1} & \cdots & g_{ii} \end{vmatrix}^{r_i},$$

*) В этом параграфе излагаются лишь эвристические соображения и дается определение индикаторных систем. Основные результаты и доказательства собраны в § 65.

которую мы будем называть *производящей функцией* представления $d(\alpha)$. Если к этой функции применять только правые сдвиги, то мы получим (после взятия линейных комбинаций) все векторы пространства представления. Если применять всевозможные левые и правые сдвиги, то мы таким же путем получаем все матричные элементы представления $d(\alpha)$.

Из перестановочности левых сдвигов с правыми естественно ожидать, что при помощи операторов левого сдвига можно получить описание пространства представления $d(\alpha)$. В частности, соотношения

$$f(\zeta g)=f(g), \quad f(\delta g)=\alpha(\delta)f(g), \quad \zeta\in Z_-, \quad \delta\in D,$$

справедливые для $\alpha(g)$, справедливы также и для всех ее правых сдвигов, а отсюда и для всех $f(g)$ из пространства представления $d(\alpha)$. Нам будет удобно записывать эти тождества в инфинитезимальной форме. Прежде всего имеем

1° $L^-f(g)=0$,

где L^- — произвольный инфинитезимальный оператор группы Z_-, порожденный левыми сдвигами на группе G. Очевидно, достаточно в этом равенстве рассматривать операторы L_{ij}, отвечающие базисным элементам e_{ij}, $i>j$. Полагая для краткости $L_i=L_{ii}$, мы имеем также равенство

2° $L_if(g)=m_if(g), \quad i=1, 2, \ldots, n-1,$

где m_i — координаты сигнатуры $\alpha=(m_1, m_2, \ldots, m_n)$*). Однако условия 1° и 2°, очевидно, не дают еще полной характеристики пространства представления, поскольку пространство всех совместных решений 1° и 2° бесконечномерно.

Если X — алгебра Ли группы G, то мы имеем для нее стандартное разложение

$$X=X_-+X_0+X_+,$$

где X_-, X_0, X_+ соответственно натянуты на базисные векторы e_{ij}, $i>j$, $i=j$, $i<j$. Как легко проверить,

*) Напомним, что $r_i=m_i-m_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, $r_n=m_n$.

элементы

$$e_i^- = e_{i+1,\, i}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

являются образующими в алгебре X_-. Действительно, всякий базисный вектор из X_- может быть представлен в виде кратного коммутатора от e_i^-. Точно так же элементы

$$e_i^+ = e_{i,\, i+1}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

являются образующими в алгебре X_+. Очевидно, условие 1° равносильно системе условий

$$L_i^- f(g) = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

где L_i^- — инфинитезимальный оператор, отвечающий элементу e_i^-. Выясним теперь, как действуют на функцию $\alpha(g)$ образующие алгебры Z_+.

Пусть L_{ij} — инфинитезимальный оператор левого сдвига на группе G, отвечающий базисному вектору $e_{ij} \in X$. Вычисляя этот оператор по известному правилу, находим

$$L_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{jk} \frac{\partial}{\partial g_{ik}} = g_j \frac{\partial}{\partial g_i},$$

где в последней сокращенной записи имеется в виду скалярное произведение векторов $g_j = (g_{j1},\ g_{j2},\ \ldots,\ g_{jn})$ и $\partial/\partial g_i = (\partial/\partial g_{i1},\ \partial/\partial g_{i2},\ \ldots,\ \partial/\partial g_{in})$. Нестрого говоря, L_{ij} есть оператор подстановки j-й строки на место i-й строки. В частности,

$$L_i^+ = g_{i+1} \frac{\partial}{\partial g_i}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

где $L_i^+ = L_{i,\, i+1}$ — инфинитезимальный оператор, отвечающий элементу e_i^+. Применяя этот оператор к минору

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1p} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ g_{p1} & \cdots & g_{pp} \end{vmatrix},$$

получаем следующий результат *):

$$\left(L_i^+\right)^{\varepsilon_i+1}\Delta_p=0, \text{ где } \varepsilon_i=\begin{cases}0 & \text{при } i\neq k,\\ 1 & \text{при } i=k.\end{cases}$$

Иначе говоря, миноры Δ_p при $i\neq p$ являются константами по отношению к дифференцированию L_i^+ и минор Δ_i ведет себя как линейная функция по отношению к этому дифференцированию. Отсюда непосредственно следует тождество

$$3^\circ \quad \left(L_i^+\right)^{r_i+1} f(g)=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

которое справедливо для $\alpha(g)$, а потому и для всякой функции $f(g)$ из пространства представления $d(\alpha)$. Остальные операторы L^+, отвечающие алгебре X_+, мы пока рассматривать не будем. Введем обозначение $\mathfrak{R}_\alpha(G)$ для пространства всех решений системы 1°—3°.

Переход к реализации на группе Z сводится к автоматическому учету условий 1° и 2°. Вместо функции $\alpha(g)$ мы рассматриваем теперь функцию «двух переменных»

$$\alpha(z,\ g)=\alpha(zg), \qquad z\in Z, \quad g\in G,$$

где $Z\subset Z_+$. Оператор представления $d(\alpha)$ задается формулой

$$T_g f(z)=\alpha(z,\ g)f(z_g),$$

и пространство представления $\mathfrak{R}_\alpha$ определяется как линейная оболочка всевозможных функций $f_g(z)=\alpha(z,g)$. Существенно, что левые сдвиги на Z не перестановочны со всеми преобразованиями T_g; однако мы по-прежнему рассмотрим операторы

$$\mathscr{D}_i=z_{i+1}\frac{\partial}{\partial z_i}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

и заметим, что функция $\alpha(z,g)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$I_\alpha\colon\ \mathscr{D}_i^{r_i+1}f(z)=0, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

---

*) Действительно, если $i>p$, то i-я строка не содержится в миноре Δ_p, если же $i<p$, то применение L_i^+ приводит к появлению двух одинаковых строк под знаком минора Δ_p; в обоих случаях $L_i^+\Delta_p=0$. Равенство $\left(L_i^+\right)^2\Delta_i=0$ очевидно, поскольку Δ_i линейно зависит от g_i.

Это вытекает непосредственно из формулы 3° для функции $\alpha(g)$. Следовательно,

$$\mathfrak{R}_\alpha \subset \Phi_\alpha,$$

где Φ_α — пространство всех решений системы I_α. Естественно исследовать связь между этими пространствами. В частности, если $n=2$, то $\mathfrak{R}_\alpha$, как мы знаем, натянуто на векторы $1, z, z^2, \ldots, z^m$, т. е. совпадает с Φ_α.

В общем случае пока докажем, что имеет место

Лемма 1. *Пространство Φ_α инвариантно относительно операторов T_g.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что любая матрица $z \in Z$ допускает однозначное представление в виде

$$z = z_i(t)x,$$

где $z_i(t) = \exp te_i^+$ и матрица $x \in Z$ выделяется дополнительным условием $x_{i,\,i+1} = 0$. Если рассматривать t и x как параметры в группе Z, то имеем

$$\mathscr{D}_i f(t,\ x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,\ x).$$

Следовательно, если F_i — совокупность всех решений уравнения $\mathscr{D}_i^{r_i+1} f(z) = 0$ с фиксированным индексом i $(i = 1\ 2, \ldots, n-1)$, то F_i состоит из всевозможных функций от t, x, которые являются полиномами от t степени не выше r_i.

Выразим теперь оператор T_g в параметрах t, x. Используя транспонирование, запишем каждую матрицу $\zeta \in Z_-$ в виде $\xi\zeta_i(\tau)$, где $\xi_{i+1,\,i} = 0$ и $\zeta_i(\tau) = \exp \tau e_i^-$. Если матрица g допускает разложение Гаусса, то матрица $\xi^{-1}gx^{-1}$ при подходящем выборе сомножителей ξ и x, очевидно, приводится к виду

$$g = \begin{Vmatrix} \delta_1 & & & & & \\ & \delta_2 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & a & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & \delta_n \end{Vmatrix},$$

где $a \in \mathrm{GL}(2)$ преобразует базисные векторы с номерами i, $i+1$. Заменяя в этом рассуждении матрицу g произведением xg, получаем разложение

$$xg = \xi g_i \tilde{x},$$

где $\xi_{i+1,\,i} = \tilde{x}_{i,\,i+1} = 0$. Рассматривая теперь произвольную матрицу $f = z_i(t)\xi$, замечаем, что $f = \tilde{\xi} z_i(t)$, где попрежнему $\tilde{\xi}_{i+1,\,i} = 0$. Следовательно,

$$zg = \tilde{\xi}(z_i(t)\, g_i)\, \tilde{x}.$$

Поскольку функция $\alpha(g)$ не меняется при левых сдвигах на ζ и правых сдвигах на z, мы находим отсюда

$$\alpha(z,\ g) = \alpha(z_i(t),\ g_i) = \mu(a_{11} + ta_{21})^{r_i},$$

где коэффициенты μ и a_{ij} выражаются только через x и g. Действительно, если Δ_p, $\tilde{\Delta}_p$ — диагональные миноры матриц $\tilde{g}_i = z_i(t) g_i$ и g_i, то $\tilde{\Delta}_p = \Delta_p$ при $p \neq i$, и $\tilde{\Delta}_i = \Delta_{i-1}(a_{11} + ta_{21})$, где a_{ij} — коэффициенты матрицы $a \in \mathrm{GL}(2)$. Наконец, мы имеем

$$T_g f(t,\ x) = \alpha(z,\ g)\, f\left(\frac{a_{12} + ta_{22}}{a_{11} + ta_{21}},\ \tilde{x}\right).$$

Действительно, разложение Гаусса элемента $\tilde{g}_i \in \mathrm{GL}(2)$ приводит к дробно-линейной подстановке для параметра t.

Из полученной формулы очевидно, что пространство F_i инвариантно относительно T_g. Но тогда это верно и для пространства Φ_α, которое является пересечением пространств $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$. Лемма доказана.

Операторы $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \ldots, \mathscr{D}_{n-1}$ мы условимся называть *главными сдвигами* на группе Z, а систему I_α — *индикаторной системой* для сигнатуры α.

§ 65. Индикаторные системы

В предыдущем параграфе мы ввели понятие индикаторной системы лишь для аналитических представлений $d(\alpha)$. Заменяя α двумя сигнатурами α, β, мы рассмотрим теперь более общую индикаторную систему $I_{\alpha\beta}$:

$$\mathscr{D}_i^{r_i+1} f(z) = 0, \quad \overline{\mathscr{D}}_i^{s_i+1} f(z) = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$