где $a \in \mathrm{GL}(2)$ преобразует базисные векторы с номерами i, $i+1$. Заменяя в этом рассуждении матрицу g произведением xg, получаем разложение

$$xg = \xi g_i \tilde{x},$$

где $\xi_{i+1,\,i} = \tilde{x}_{i,\,i+1} = 0$. Рассматривая теперь произвольную матрицу $f = z_i(t)\xi$, замечаем, что $f = \tilde{\xi} z_i(t)$, где попрежнему $\tilde{\xi}_{i+1,\,i} = 0$. Следовательно,

$$zg = \tilde{\xi}(z_i(t)\, g_i)\, \tilde{x}.$$

Поскольку функция $\alpha(g)$ не меняется при левых сдвигах на ζ и правых сдвигах на z, мы находим отсюда

$$\alpha(z,\ g) = \alpha(z_i(t),\ g_i) = \mu(a_{11} + ta_{21})^{r_i},$$

где коэффициенты μ и a_{ij} выражаются только через x и g. Действительно, если Δ_p, $\tilde{\Delta}_p$ — диагональные миноры матриц $\tilde{g}_i = z_i(t) g_i$ и g_i, то $\tilde{\Delta}_p = \Delta_p$ при $p \neq i$, и $\tilde{\Delta}_i = \Delta_{i-1}(a_{11} + ta_{21})$, где a_{ij} — коэффициенты матрицы $a \in \mathrm{GL}(2)$. Наконец, мы имеем

$$T_g f(t,\ x) = \alpha(z,\ g)\, f\left(\frac{a_{12} + ta_{22}}{a_{11} + ta_{21}},\ \tilde{x}\right).$$

Действительно, разложение Гаусса элемента $\tilde{g}_i \in \mathrm{GL}(2)$ приводит к дробно-линейной подстановке для параметра t.

Из полученной формулы очевидно, что пространство F_i инвариантно относительно T_g. Но тогда это верно и для пространства Φ_α, которое является пересечением пространств $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$. Лемма доказана.

Операторы $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \ldots, \mathscr{D}_{n-1}$ мы условимся называть *главными сдвигами* на группе Z, а систему I_α — *индикаторной системой* для сигнатуры α.

§ 65. Индикаторные системы

В предыдущем параграфе мы ввели понятие индикаторной системы лишь для аналитических представлений $d(\alpha)$. Заменяя α двумя сигнатурами α, β, мы рассмотрим теперь более общую индикаторную систему $I_{\alpha\beta}$:

$$\mathscr{D}_i^{r_i+1} f(z) = 0, \quad \overline{\mathscr{D}}_i^{s_i+1} f(z) = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

где $\mathscr{D}_i$, $\overline{\mathscr{D}}_i$ — аналитические и антианалитические операторы левого сдвига на группе Z, отвечающие элементам $e_i^+ = e_{i,\,i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Неприводимое вещественное представление группы G, определяемое сигнатурами α, β, мы условимся обозначать $d(\alpha, \beta)$:

$$d(\alpha, \beta) = d(\alpha) \otimes \overline{d(\beta)}.$$

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ — пространство полиномов на группе Z, в котором действует неприводимое представление $d(\alpha, \beta)$. Тогда $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ совпадает с совокупностью всех решений индикаторной системы $I_{\alpha\beta}$.*

Доказательство. Займемся сначала сравнительно простым алгебраическим вопросом. Линейный оператор A называется *нульстепенным*, если $A^n = 0$ при некотором натуральном n. Если A и B нульстепенны, то это не обязательно имеет место для суммы $A + B$ и коммутатора $[A, B]$. Покажем, однако, что выполняется *)

Лемма 2. *Пусть A, B — линейные операторы в векторном пространстве V (без топологии) и операторы A, B являются нульстепенными на некотором подпространстве V_0:*

$$A^m = 0, \quad B^n = 0.$$

Если коммутатор $C = [A, B]$ перестановочен с A и B, то он также является нульстепенным на V_0. При этом всякая линейная комбинация операторов A, B, C также является нульстепенной на V_0.

Доказательство. Заметим, что по условию леммы подпространство V_0 не предполагается инвариантным относительно A и B. Положим $V_k = A^k V_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; тогда $V_k = (0)$ при $k \geqslant m$, и мы в действительности получаем конечное число подпространств. Покажем, что оператор B по-прежнему является нульстепенным на каждом из этих подпространств. Для этого достаточно использовать следующее общее тождество:

$$D^n X = \sum C_n^k X^{(k)} D^{n-k}, \qquad (*)$$

*) В § 111 мы получим значительное обобщение леммы 2.

которое справедливо для любых двух операторов D, X (и вообще для любых элементов абстрактной ассоциативной алгебры). Здесь положено $X^{(k)} = [D, [D, \ldots \ldots, [D, X] \ldots]]$ (коммутатор кратности k; $X^{(0)} = 1$), и C_n^k — биномиальные коэффициенты. Полагая, в частности, $X = A$, $D = B$, получаем, что $X'' = X''' = \ldots = (0)$; следовательно, в правой части (*) остается лишь два слагаемых, содержащих B^n и B^{n-1}. Следовательно, $B^{n+1}AV_0 = 0$, т. е. $B^{n+1}V_1 = (0)$. Точно так же $B^{n+k}V_k = (0)$. Следовательно, оператор B является нульстепенным также на геометрической сумме подпространств V_k. В этом случае определен также конечный степенной ряд

$$B(t) = e^{tB} = 1 + tB + \frac{t^2B^2}{2} + \ldots$$

Рассмотрим теперь оператор $\nabla X = [A, X]$. Применяя этот оператор к функции $B(t)$ и пользуясь равенствами $\nabla B = C$, $\nabla C = 0$, легко получаем, что $\nabla B(t) = tB(t)C$. Для наших целей достаточно рассматривать случай $t = 1$. Применяя оператор ∇ повторно, получаем в результате следующее равенство:

$$C^n = e^{-B}\nabla^n e^B, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Применяя обе части этого равенства к векторам $\xi \in V_0$, замечаем, что мы не выходим за пределы геометрической суммы V_k (поскольку $\nabla B = AB - BA$); следовательно, e^B является полиномом от B и $\nabla^N e^B = 0$ при достаточно высоком N. Следовательно, $C^N = 0$ на V_0.

Далее, используя соотношения коммутации между A, B, C, легко проверить следующее тождество, в котором каждая экспонента рассматривается как формальный степенной ряд по переменной t *):

$$\exp t(A + B)\exp(-tA) = \exp t(B - tC).$$

Это равенство следует понимать как равенство всех операторных коэффициентов при степенях переменной t. Поскольку B и C перестановочны, мы можем записывать правую часть также в виде $\exp(-t^2C)\exp tB$.

*) Эта формула является частным случаем формулы Кемпбелла — Хаусдорфа при $[A, B] = C$, $[A, C] = [B, C] = 0$.

В результате имеем

$$\exp t(A+B) = \exp(-t^2C)\cdot\exp tB\cdot\exp tA.$$

Применим обе части этого тождества к элементам $\xi \in V_0$. Тогда, как и прежде, мы не выйдем за пределы геометрической суммы подпространств V_k при действии $\exp tA$. Следовательно, $\exp tB\cdot\exp tA$ является полиномом от t на V_0. Поскольку C перестановочно с A и B, то $\exp(-t^2C)$ можно применять непосредственно к элементу $\xi \in V_0$. Следовательно, $\exp t(A+B)$ является полиномом на V_0. Но тогда $(A+B)^M = 0$ при достаточно высоком M. То же верно для $\lambda A + \mu B + \nu C$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $x \to \tau(x)$ — представление алгебры X_+ в векторном пространстве V (без топологии) и операторы*

$$E_i^+ = \tau(e_{i,\,i+1}), \qquad i = 1,\ 2\ \ldots,\ n-1,$$

нульстепенны на некотором подпространстве V_0. Тогда и все операторы $\tau(x)$ нульстепенны на V_0 с показателями $n(x)$, равномерно ограниченными по x.

Доказательство. Согласно лемме 2 из нульстепенности E_{ik}, E_{kj} следует нульстепенность E_{ij}, $i<k<j$. Проводя индукцию по $\delta = j-i$, заключаем, что всякий оператор E_{ij} является нульстепенным на V_0. Полагая, далее,

$$A_j = a^i E_{ij}$$

(сумма по i от 1 до $j-1$), замечаем, что все слагаемые этой суммы взаимно перестановочны; следовательно, существует показатель $n = n(j)$, для которого $A_j^n = 0$. При фиксированном j операторы A_j и

$$B_j = A_{j+1} + A_{j+2} + \ \ldots + A_n$$

удовлетворяют условиям леммы 2 (проверку опускаем). Следовательно, из нульстепенности B_j вытекает нульстепенность $B_{j-1} = A_j + B_j$. Понижая j от n до 1, получаем наше утверждение. Следствие доказано.

Докажем теперь, что имеет место

Лемма 3. *Пространство всех решений системы $I_{\alpha\beta}$ конечномерно.*

Доказательство. Пусть z_k — произвольная матрица из Z, у которой над диагональю все элементы равны нулю, кроме элементов t_{ik}, расположенных в k-м столбце. Тогда, как легко проверить, произвольная матрица $z \in Z$ может быть однозначно записана в виде

$$z = z_2 z_3 \ldots z_n.$$

Заметим, что множество Z_k всех матриц вида z_k является абелевой подгруппой в Z и координаты t_{ik} являются аддитивными параметрами в Z_k. Мы будем рассматривать числа t_{ik}, $1 \leqslant i < k \leqslant n$, как параметры во всей группе Z. Фиксируем матрицу $z_0 = z_2 z_3 \ldots z_{k-1}$ и рассмотрим в группе Z однопараметрическую подгруппу вида

$$z(t) = z_0 (\exp t e_{ik}) z_0^{-1}.$$

Пусть L_{ik} — инфинитезимальный оператор левого сдвига на Z, порожденный этой подгруппой. Пусть $\overline{L_{ik}}$ — соответствующий антианалитический оператор. Тогда, очевидно,

$$L_{ik} = \frac{\partial}{\partial t_{ik}}, \quad \overline{L_{ik}} = \frac{\partial}{\partial \overline{t_{ik}}}.$$

Вводя обозначение V_0 для совокупности всех решений индикаторной системы $I_{\alpha\beta}$, замечаем, что согласно следствию из леммы 2 любой инфинитезимальный оператор левого сдвига является нульстепенным на V_0: $L^m = 0$. При этом можем считать, что показатель m не зависит от L. В частности,

$$L_{ik}^m = 0, \quad \overline{L_{ik}}^m = 0,$$

и это означает, очевидно, что всякая функция $f(z) \in V_0$ является полиномом по t_{ik} степени не выше m. Следовательно, V_0 состоит из полиномов ограниченной степени. Лемма доказана.

Теперь уже нетрудно завершить доказательство теоремы 1. Мы имеем

$$\mathfrak{N}_{\alpha\beta} \subset V_0,$$

где V_0 — совокупность всех решений индикаторной системы $I_{\alpha\beta}$. Согласно лемме 3 V_0 конечномерно. Кроме того, перефразируя лемму 1 на случай системы $I_{\alpha\beta}$, заключаем, что V_0 инвариантно относительно операторов T_g:

$$T_g f(z) = \alpha(z, g)\overline{\beta(z, g)} f(z_g).$$

Поскольку эти операторы являются рациональными функциями от g, нам надлежит еще показать, что они не имеют полюсов на V_0. Действительно, если элементы z и g достаточно близки к единице, то $zg \in G_{\text{reg}}$, т. е. элемент zg допускает разложение Гаусса, и выражение $T_g f(z)$ определено. Поскольку $T_g f(z)$ удовлетворяет индикаторной системе $I_{\alpha\beta}$ вместе с $f(z)$, то $T_g f(z)$ является полиномом на Z и потому определено всюду на Z. Следовательно, оператор T_g определен в V_0 для g, достаточно близких к e, но тогда в силу связности G также и на всей группе G *). Следовательно, эти операторы определяют представление в V_0.

Из единственности старшего вектора $(f_0(z) \equiv 1)$ следует, что представление T_g в пространстве V_0 неприводимо **). Следовательно, $\mathfrak{R}_{\alpha\beta} = V_0$. Теорема доказана.

Замечание. До сих пор мы не уточняли, в каком пространстве функций рассматривается система $I_{\alpha\beta}$. Однако ясно, что допустима любая традиционная постановка задачи — либо в классе достаточное число раз дифференцируемых функций $f(z)$, либо даже в классе обобщенных функций. При этом мы показываем, что все решения в действительности являются полиномами на группе Z ***).

Обращаясь к реализации на группе G, из теоремы 1 легко получаем

---

*) Можно также заметить, что инфинитезимальные операторы, порожденные T_g, являются дифференциальными операторами с полиномиальными коэффициентами на Z и, следовательно, дифференциал T_g определен всюду на V_0.

**) В этом пункте мы неявно используем принцип полной приводимости.

***) В чисто аналитических терминах можем сформулировать теорему 1 следующим образом: единственными решениями системы $I_{\alpha\beta}$ являются функции $\alpha(z, g)\overline{\beta(z, g)}$ и их линейные комбинации.

Следствие. *В реализации на группе G пространство неприводимого представления $d(\alpha, \beta) = d(\alpha) \otimes \overline{d(\beta)}$ совпадает с совокупностью всех решений системы* 1°—3° § 64, *дополненной аналогичными соотношениями для антианалитических операторов.*

Действительно, если $f(g) \in V_0$, где V_0 — множество всех решений указанной системы, то $f(z)$, очевидно, удовлетворяет системе $I_{\alpha\beta}$, т. е. $f(z) \in \mathfrak{R}_{\alpha\beta}$. Поскольку V_0 инвариантно относительно правых сдвигов на G, образ этого пространства при сужении на Z инвариантен относительно операторов T_g. Ввиду неприводимости $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ этот образ совпадает с $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$.

Если нас интересуют только аналитические представления группы $\mathrm{GL}(n)$, то мы полагаем $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 0$ и получаем, что пространство $\mathfrak{R}_\alpha$, в котором действует представление $d(\alpha)$, выделяется индикаторной системой I_α с дополнительными условиями

$$\overline{\mathscr{D}}_1 = \overline{\mathscr{D}}_2 = \ldots = \overline{\mathscr{D}}_{n-1} = 0, \qquad (*)$$

которые означают, что полином $f(z)$ зависит только от z_{ij}, но не от $\overline{z_{ij}}$. Иначе говоря, $\mathfrak{R}_\alpha$ выделяется системой I_α в классе всех аналитических функций на группе Z. Система $(*)$ может рассматриваться как аналог *уравнений Коши — Римана* для группы Z.

§ 66. Алгебра Z-мультипликаторов и задача о сужении с группы на подгруппу

Реализация на группе Z позволяет нам использовать новую алгебраическую операцию — умножение в классе полиномов $f(z)$ — для изучения структуры неприводимого представления $d(\alpha)$. Так, в частности, еще в гл. VII мы доказали следующее мультипликативное свойство:

$$\mathfrak{R}_{\alpha+\beta} = \mathfrak{R}_\alpha \mathfrak{R}_\beta,$$

для пространств $\mathfrak{R}_\alpha$, составленных из полиномов $f(z)$, в которых реализуются неприводимые представления $d(\alpha)$. Здесь сигнатура $\alpha + \beta$ вычисляется по правилу сложения векторов α и β. Линейные связи между