Упражнения

1. Пусть a — эрмитова матрица с собственными значениями $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0$ и $b = pap$, где p — произвольный ортогональный проектор размерности $n-1$. Показать, что собственные значения $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ матрицы b в соответствующем пространстве размерности $n-1$ удовлетворяют неравенствам $\alpha_1 \geqslant \beta_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \beta_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{n-1} \geqslant \beta_{n-1} \geqslant \alpha_n$.

2. Сформулировать правило сужения $U(n)/U(n-1)$ в терминах орбит относительно присоединенного представления (см. упражнение в конце § 50).

§ 67. Базис Гельфанда — Цейтлина

Рассмотрим в G цепочку вложенных подгрупп

$$G_n \supset G_{n-1} \supset G_{n-2} \supset \ldots \supset G_2 \supset G_1,$$

где G_i изоморфна $GL(i)$ и $G_n = G$. При этом нам будет удобно считать, что G_i преобразует первые i базисных векторов, оставляя остальные неподвижными. Следовательно, G_{n-1} состоит из матриц вида

$$g = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad a \in GL(n-1),$$

и подобным образом G_{i-1} вкладывается в G_i.

Как мы видели в § 66, если $d(\alpha)$ — неприводимое представление группы $G = G_n$, то спектр сужения на G_{n-1} является *простым*, т. е. каждое неприводимое представление G_{n-1} содержится в $d(\alpha)$ однократно. Точно так же, если $d(\alpha_i)$ — неприводимое представление подгруппы G_i, то спектр сужения на G_{i-1} является простым. Мы можем использовать это свойство для построения базиса в пространстве $\mathfrak{R}_\alpha$.

Действительно, сужая $d(\alpha)$ последовательно на G_{n-1}, $G_{n-2}, \ldots, G_1$, получаем на каждом шаге все более дробное разбиение $\mathfrak{R}_\alpha$ в ортогональную прямую сумму подпространств, неприводимых относительно G_i, причем подпространства, получаемые на последнем шаге, одномерны (подгруппа G_1 абелева). Выбирая в каждом из этих одномерных подпространств по ненулевому вектору, получаем ортогональный базис во всем пространстве $\mathfrak{R}_\alpha$. Очевидно, каждый из этих векторов однозначно

определяется следующей таблицей целых чисел:

$$\mu = \begin{pmatrix} m_{1n} & m_{2n} & m_{3n} & \dots & m_{n-1,\,n} & m_{nn} \\ m_{1,\,n-1} & m_{2,\,n-1} & \dots & m_{n-1,\,n-1} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & m_{12} & m_{22} & & \\ & & & m_{11} & & \end{pmatrix},$$

где каждая строка $\alpha_i = (m_{1i}, m_{2i}, \dots, m_{ii})$ означает сигнатуру того неприводимого представления подгруппы G_i, в пространстве которого данный вектор содержится. При этом мы положили для общности записи $\alpha_n = \alpha$, т. е. заменили обозначение m_i на m_{in} (m_i — параметры сигнатуры α), $m_{1n} \geqslant m_{2n} \geqslant \dots \geqslant m_{nn}$. Согласно теореме 2 m_{ki} — произвольные целые числа, удовлетворяющие ограничениям

$$m_{ki} \geqslant m_{k-1,\,i} \geqslant m_{k,\,i-1}.$$

Следовательно, каждое из этих чисел в таблице μ изменяется в пределах между двумя вышестоящими числами*). Соответствующий базисный вектор обозначим символом e_η.

Нетрудно видеть, что базисные векторы e_μ являются весовыми относительно подгруппы D. Действительно, вместо G_{n-1} мы могли бы рассматривать подгруппу матриц вида

$$g = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & \delta_{n-1} \end{Vmatrix}, \qquad a \in \mathrm{GL}(n-1), \quad \delta_n \neq 0,$$

изоморфную $G_{n-1} \times \Lambda$, где $\Lambda = \mathrm{GL}(1)$ — мультипликативная группа комплексных чисел; при этом преобразования подгруппы Λ перестановочны с каждым $d(\alpha_{n-1})$, т. е. сводятся к умножению на число в пространстве этого представления. Продолжая редукцию по размерности, получаем вместо G_1 подгруппу, изоморфную Λ^n, т. е. группу D. Вычисляя веса, получаем как следствие теоремы 2 следующий результат:

---

*) Сигнатура $\alpha_1 = (m_{11})$ понимается, естественно, как показатель одномерного представления λ^m подгруппы G_1, где $\lambda = g_{11}$ — единственный параметр в G_1.

Теорема 3. *В пространстве неприводимого представления $d(\alpha)$, $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, существует ортогональный базис e_μ, где μ означает описанную выше таблицу целых чисел m_{ik}, $1 \leqslant i \leqslant k$,*

$$m_{ik} \geqslant m_{i,\,k-1} \geqslant m_{i+1,\,k}.$$

При этом каждый вектор e_μ является весовым с весом

$$\lambda_\mu(\delta) = \delta_1^{s_1 - s_0} \delta_2^{s_2 - s_1} \ldots \delta_n^{s_n - s_{n-1}},$$

где $s_k = \sum_{i=1}^{k} m_{ik}$ — сумма чисел, расположенных в k-й строке таблицы μ, и $s_0 = 0$.

Доказательство. Согласно замечанию, сделанному в конце § 66, старшему вектору представления $d(\alpha_{n-1})$ приписывается собственное значение $\delta_n^{s_n - s_{n-1}}$ относительно подгруппы Λ; следовательно, то же собственное значение имеют и все остальные векторы e_μ с фиксированной строкой α_{n-1}. Аналогичную роль для сигнатуры α_i играет множитель $\delta_i^{s_i - s_{i-1}}$ $(s_0 = 0)$. Теорема доказана.

Полученный базис e_μ называется *базисом Гельфанда — Цейтлина.*

Замечание 1. Вектор e_μ является старшим вектором относительно подгруппы G_{i_0} тогда и только тогда, когда для каждого $i \leqslant i_0$ строка α_{i-1} получается из α_i вычеркиванием последнего параметра m_{ii}; в этом случае строки $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{i_0}$ вполне характеризуют вектор e_μ. В частности, старший вектор $d(\alpha)$ вполне характеризуется исходной сигнатурой α.

Замечание 2. Нетрудно выписать явный вид базиса e_μ в реализации на группе Z, хотя окончательные выражения получаются достаточно громоздкими. Мы рассмотрим для простоты только случай $n = 3$, т. е. группу $G_3 = \mathrm{GL}(3)$. В этом случае схема μ имеет вид

$$\mu = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ & k_1 \;\; k_2 & \\ & s & \end{pmatrix},$$

где m_1, m_2, m_3 — параметры, задающие представление, и $m_1 \geqslant k_1 \geqslant m_2 \geqslant k_2 \geqslant m_3$, $k_1 \geqslant s \geqslant k_2$. Напомним, что старшими векторами относительно G_2 являются в данном случае векторы $\varphi_k(z) =$

$= z_{13}^{m_1-k_1} z_{23}^{m_2-k_2}$, где $k = (k_1, k_2)$. Применим к этим векторам преобразование

$$T_g = \exp \tau E_-, \qquad -\infty < \tau < \infty,$$

где $E_- = E_{21}$ — понижающий оператор группы G_2, и заметим, что E_-^p переводит вес $\delta_1^{k_1}\delta_2^{k_2}$ в вес $\delta_1^{k_1-p}\delta_2^{k_2+p}$. Координата s, входящая в схему μ, должна совпадать с $k_1 - p$; следовательно, вектор e_μ может быть получен (с точностью до множителя) как коэффициент при τ^{k_1-s} в разложении $T_g\varphi_k$ по степеням τ. Положим

$$g = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \exp \tau e_{21};$$

тогда $T_g = \exp \tau E_-$. Согласно общей формуле для $d(\alpha)$ мы имеем

$$T_g\varphi_k(z) = \Delta_1^{m_1-m_2}\Delta_2^{m_2-m_3}\left(\frac{z_{13}}{\Delta_1}\right)^{m_1-k_1}\left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_2}\right)^{m_2-k_2},$$

где Δ_k — диагональный минор матрицы zg, $z \in Z$, $g \in G_2$, и Δ_{23} — минор этой матрицы, составленный из первых двух строк и столбцов с номерами 1, 3 *). В нашем случае $\Delta_1 = 1 + \tau z_{12}$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_{23} = z_{23} + \tau\hat{z}_{13}$, где положено $\hat{z}_{13} = z_{12}z_{23} - z_{13}$. Следовательно,

$$T_g\varphi_k(z) = z_{13}^{m_1-k_1}(1 + \tau z_{12})^{k_1-m_2}(z_{23} + \tau\hat{z}_{13})^{m_2-k_2}.$$

Раскрывая произведения биномов и вычисляя суммарный коэффициент при τ^{k_1-s}, приходим к следующему результату:

$$e_\mu(z) = \frac{1}{N_\mu}\sum_{\varepsilon_1-\varepsilon_2=k_1-s} \frac{z_{13}^{m_1-k_1} z_{12}^{\varepsilon_1}\hat{z}_{13}^{\varepsilon_2} z_{23}^{m_2-k_2-\varepsilon_2}}{\varepsilon_1!\,\varepsilon_2!\,(k_1-m_2-\varepsilon_1)!\,(m_2-k_2-\varepsilon_2)!}.$$

В общем случае подобная процедура позволяет получить рекуррентное соответствие между базисами Гельфанда — Цейтлина для G_n и G_{n-1}. Однако мы в дальнейшем укажем эту связь в иной форме, не зависящей от реализации на группе Z.

Из однократности спектра сужения вытекает еще одно замечательное следствие, которое мы также сформулируем в виде теоремы:

Теорема 4. *Пусть C_{ki}, $1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$, — базисные операторы Казимира для подгруппы G_i, изоморфной* $\mathrm{GL}(i)$. *Тогда операторы C_{ki} одновременно диагонали-*

*) Здесь мы впервые воспользовались общим видом операторов T_g в параметрах Гаусса (см. § 9).

зуются в базисе e_μ и каждый индекс μ может быть однозначно занумерован совокупностью всех собственных значений операторов C_{ki}.

Доказательство. Операторы C_{kn} являются скалярами на $d(\alpha)$, и их совокупные собственные значения характеризуют, как мы знаем, сигнатуру α, т. е. первую строку в схеме μ. Точно так же $C_{k,\,n-1}$ являются скалярами на $d(\alpha_{n-1})$ и, следовательно, диагонализуются в базисе e_μ; при этом их собственные значения характеризуют вторую строку схемы μ. Продолжая этот процесс, приходим на последнем шаге к оператору C_{11}, который является единственным инфинитезимальным оператором G_1 и собственное значение которого совпадает с параметром m_{11}, входящим в схему μ. Теорема доказана *).

Следствие. *Всякий оператор, диагональный в весовом базисе e_μ, может быть представлен в виде полинома от операторов C_{ki}.*

Действительно, пусть $\mathfrak{C}$ — алгебра всех полиномов от операторов C_{ki}. Всякий оператор $C \in \mathfrak{C}$ диагонализуется в весовом базисе: $Ce_\mu = c(\mu)e_\mu$, и функции $c(\mu)$ «разделяют» точки μ, т. е. для каждой пары $\mu_1 \neq \mu_2$ найдется функция $c(\mu)$ такая, что $c(\mu_1) \neq c(\mu_2)$. Заменяя $c(\mu)$ на $\alpha c(\mu) + \beta$, подбираем α, β таким образом, чтобы полученная функция $c_{\mu_1\mu_2}$ принимала значение 1 в точке μ_1 и значение 0 в точке μ_2. Полагая $c_\lambda(\mu) = \prod_\nu c_{\lambda\nu}(\mu)$, получаем символ Кронекера: $c_\lambda(\mu) = \delta_{\lambda\mu}$. Следовательно, в алгебре $\mathfrak{C}$ содержится проектор на каждый базисный вектор e_λ. Отсюда следует наше утверждение.

Пользуясь терминологией физиков, можем сказать, что элементы алгебры $\mathfrak{C}$ образуют «полную систему наблюдаемых» в пространстве представления $d(\alpha)$.

Замечание. Если представление T группы $\mathrm{GL}(n)$ содержит неприводимые составляющие $d(\alpha)$ однократно,

---

*) Заметим, что суммы $s_i = \sum_{k=1}^{i} m_{ki}$, входящие в вес e_μ, являются собственными значениями линейных операторов Казимира C_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

то операторы C_{ki} образуют «полную систему наблюдаемых» также и в пространстве представления T (действительно, подсистема C_{kn} «разделяет» $d(\alpha)$).

§ 68. Понижающие операторы в инфинитезимальной форме

Мы установим в этом параграфе явную связь между мультипликаторами z_{ij}, $i<j$, и понижающими операторами E_{ij}, $i>j$, откуда, в частности, будет следовать явное выражение для базисных векторов Гельфанда — Цейтлина.

Условимся говорить, что линейный оператор F в пространстве представления является *весовым с весом* $\delta_i^{-1}\delta_j$, если он перестановочен со всеми диагональными базисными операторами, кроме E_{ii}, E_{jj}, и если

$$[E_{jj},\ F]=[F,\ E_{ii}]=F;$$

очевидно, в этом случае оператор F переводит всякий весовой вектор в весовой с умножением веса на $\delta_i^{-1}\delta_j$. В частности, этим свойством обладают операторы z_{ij} и E_{ji}, поэтому для достижения большего единообразия мы условимся изменить обозначение z_{ij} на Z_{ji}.

Лемма 5. *В применении к старшему вектору* f_0 *представления* $d(\alpha)$ *выполняется следующее тождество*:

$$\sum_{j=i}^{k-1} E_{kj}Z_{ji}=(m_i-m_k+k-i-1)\,Z_{ki}, \qquad (*)$$

где $k>i$ *и где положено* $Z_{ii}=1$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Рассмотрим вначале частный случай $i=1$, $k=n$. Поскольку в реализации на группе Z понижающие операторы действуют довольно сложно, мы используем реализацию на группе G и положим

$$E_{ij}=x^i\frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $x^i=\{x_{ki}\}$ — i-й столбец квадратной матрицы x и выражение в правой части означает свертку векторов x^i, $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ (при этом не обязательно считать, что