то операторы C_{ki} образуют «полную систему наблюдаемых» также и в пространстве представления T (действительно, подсистема C_{kn} «разделяет» $d(\alpha)$).

§ 68. Понижающие операторы в инфинитезимальной форме

Мы установим в этом параграфе явную связь между мультипликаторами z_{ij}, $i<j$, и понижающими операторами E_{ij}, $i>j$, откуда, в частности, будет следовать явное выражение для базисных векторов Гельфанда — Цейтлина.

Условимся говорить, что линейный оператор F в пространстве представления является *весовым с весом* $\delta_i^{-1}\delta_j$, если он перестановочен со всеми диагональными базисными операторами, кроме E_{ii}, E_{jj}, и если

$$[E_{jj},\ F]=[F,\ E_{ii}]=F;$$

очевидно, в этом случае оператор F переводит всякий весовой вектор в весовой с умножением веса на $\delta_i^{-1}\delta_j$. В частности, этим свойством обладают операторы z_{ij} и E_{ji}, поэтому для достижения большего единообразия мы условимся изменить обозначение z_{ij} на Z_{ji}.

Лемма 5. *В применении к старшему вектору* f_0 *представления* $d(\alpha)$ *выполняется следующее тождество*:

$$\sum_{j=i}^{k-1} E_{kj}Z_{ji}=(m_i-m_k+k-i-1)\,Z_{ki}, \qquad (*)$$

где $k>i$ *и где положено* $Z_{ii}=1$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Рассмотрим вначале частный случай $i=1$, $k=n$. Поскольку в реализации на группе Z понижающие операторы действуют довольно сложно, мы используем реализацию на группе G и положим

$$E_{ij}=x^i\frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $x^i=\{x_{ki}\}$ — i-й столбец квадратной матрицы x и выражение в правой части означает свертку векторов x^i, $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ (при этом не обязательно считать, что

$\det x \neq 0$). Согласно общим формулам разложения Гаусса мы имеем

$$Z_{ji} = \frac{[1, 2, \ldots, i-1, j]}{[1, 2, \ldots, i-1, i]}, \qquad i < j,$$

где $[i_1, i_2, \ldots, i_p]$ — минор, составленный из первых p строк матрицы x и столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_p$. При этом старший вектор f_0 представления $d(\alpha)$ записывается в виде

$$f_0 = [1]^{r_1} [1, 2]^{r_2} \ldots [1, 2, \ldots, n]^{r_n}.$$

Применяя к этому вектору операторы $E_{nj} \cdot Z_{j1}$, мы заметим, что $E_{nj}[1, 2, \ldots, i] = 0$, если $j > i$ и $E_{nj}[1, 2, \ldots, i] = [1, 2, \ldots, j-1, n, j+1, \ldots, i]$, $j \leqslant i$; следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n-1} E_{nj} Z_{j1} f_0 = E_{n1} f_0 + \sum_{j=2}^{n-1} E_{nj} \frac{[j]}{[1]} f_0 =$$

$$= (n-2) \frac{[n]}{[1]} f_0 + \sum_{i=1}^{n-1} r_i \frac{[j]}{[1]} \frac{[1, 2, \ldots, j-1, n, j+1, \ldots, i]}{[1, 2, \ldots, j-1, j, j+1, \ldots, i]} =$$

$$= \left\{ (n-2) + \sum_{i=1}^{n-1} r_i \right\} \frac{[n]}{[1]} f_0.$$

При этом мы воспользовались легко проверяемым тождеством

$$\sum_{j=1}^{i} [j] [1, 2, \ldots, j-1, n, j+1, \ldots, i] - [n] [1, 2, \ldots, i] = 0,$$

которое означает, что определитель $[1, 2, \ldots, i]$, окаймленный при помощи первой строки и последнего столбца матрицы x, равен нулю. Наконец, заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} r_i = \sum_{i=1}^{n-1} (m_i - m_{i+1}) = m_1 - m_n.$$

В результате получаем

$$\sum_{j=1}^{n-1} E_{nj} Z_{j1} f_0 = (m_1 - m_n + (n-2)) Z_{n1} f_0,$$

т. е. в нашем случае (*) доказано. В общем случае достаточно заметить, что все операции, входящие в (*), порождаются подгруппой G_{ik}, которая преобразует только базисные векторы с номерами $i, i+1, \ldots, k$. Старший вектор f_0 имеет сигнатуру $\beta = (m_i, m_{i+1}, \ldots, m_k)$ относительно этой подгруппы, и представление $d(\beta)$ естественно реализуется в классе квадратных матриц $n' \times n'$, где $n' = k - i + 1$. Следовательно, мы получим общий случай, если заменим m_1, m_n на m_i, m_k и $n-2$ на $n'-2 = k-i-1$. Лемма доказана.

Если вместо параметров m_i, определяющих представление, использовать параметры $l_i = m_i + (n-i)$ *), то $l_1 > l_2 > \ldots > l_n$ и (*) записывается в виде

$$\sum_{j=i}^{k-1} E_{kj} Z_{ji} = (l_i - l_k - 1) Z_{ki}. \qquad (**)$$

Полученное соотношение является соотношением рекуррентного типа и может быть поэтому использовано для вычисления мультипликаторов Z_{ki}. Докажем, что имеет место

Лемма 6. *В применении к старшему вектору f_0 представления $d(\alpha)$ мультипликатор Z_{ki} может быть представлен следующей формулой:*

$$Z_{ki} = \prod_{j=i+1}^{k} (l_i - l_j - 1)^{-1} \cdot \nabla_{ki}, \qquad k > i,$$

где ∇_{ki} — полином от понижающих операторов E_{ji}, $j > i$, и диагональных операторов $L_j = E_{jj} + (n-j)$:

$$\nabla_{ki} = \sum_{j_1 > j_2 > \ldots > j_s} c_{j_1 j_2 \ldots j_s} E_{kj_1} E_{j_1 j_2} \ldots E_{j_s i}, \quad k > i; \ \nabla_{ii} = 1.$$

Здесь сумма берется по всем возможным наборам индексов $j_1, j_2, \ldots, j_s$, расположенных между k, i (т. е. $s = 1, 2, \ldots, k-i-1$), *и*

$$c_{j_1 j_2 \ldots j_s} = \prod_{\substack{k > j > i \\ j \neq j_m}} L_{ij}, \qquad L_{ij} = L_i - L_j.$$

---

*) Мы уже встречались с этими параметрами в гл. IX при рассмотрении операторов Казимира. Можно было бы с тем же успехом положить $l_i = m_i - i$.

Доказательство. Умножая обе части (**) справа на оператор *)

$$M_{k-1,\,i}=\prod_{s=i+1}^{k-1}(L_{is}-1)=\prod_{s=j+1}^{k-1}(L_{is}-1)\prod_{s=i+1}^{j}(L_{is}-1)=N_{kj}M_{ji},$$

замечаем, что $Z_{ji}N_{kj}=C_{kj}Z_{ji}$, где $C_{kj}=\prod_{s=j+1}^{k-1}L_{is}$, и оператор C_{kj} перестановочен с E_{kj}. В то же время $Z_{ji}M_{ji}=\nabla_{ji}$ в применении к старшему вектору f_0. Следовательно, (**) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{k-1}X_{kj}\nabla_{ji}=\nabla_{ki},$$

где положено $X_{kj}=C_{kj}E_{kj}$. Поскольку это уравнение имеет матричную структуру, введем формальные матрицы

$$X=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ X_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ X_{31} & X_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & \dots & X_{n,\,n-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\nabla=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \nabla_{31} & \nabla_{32} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nabla_{n1} & \nabla_{n2} & \nabla_{n3} & \dots & \nabla_{n,\,n-1} & 1 \end{Vmatrix}$$

и запишем уравнение в виде

$$1+X\nabla=\nabla,$$

где 1 — единичная матрица $n\times n$. В действительности следует рассматривать такое уравнение отдельно для каждого столбца матрицы ∇ (поскольку определение X_{kj} зависит от индекса i), но вместо этого мы можем считать, что вектор f_0 заменяется формальным столбцом из

*) Мы полагаем $M_{ii}=1$ (в этом случае нижний предел произведения превосходит верхний предел).

элементов $0, \ldots, 0, f_0, 0, \ldots, 0$ с f_0 на i-м месте. Очевидно, матрица

$$\nabla = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1}$$

является решением этого уравнения. Действительно, $X^n = 0$, и мы имеем

$$1 + X\nabla = 1 + X(1 + X + \ldots + X^{n-1}) = \\ = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1} = \nabla.$$

Расшифровывая каждый элемент полученной матрицы ∇, получаем ∇_{ki}. Лемма доказана.

Замечание 1. В процессе доказательства мы получили следующее символическое выражение для матрицы ∇ с элементами ∇_{ki}:

$$\nabla = \frac{1}{1 - X},$$

где $X_{kj} = C_{kj}E_{kj}$ при $k > j$ и $X_{kj} = 0$ при $k \leqslant j$. При этом $C_{kj} = \prod_{s=j+1}^{k-1} L_{is}$ и обе части равенства применяются к вектору $(0, \ldots, f_0, 0, \ldots, 0)$ с f_0 на i-м месте *).

Замечание 2. Условимся рассматривать E_{ij} как символическое произведение $x^i\partial_j$, где x^i — «оператор рождения» и ∂_j — «оператор уничтожения»; тогда операторы ∇_{ki} мы можем записывать следующим образом:

$$\nabla_{ki} = x^k B_{k-1} B_{k-2} \ldots B_{i+1}\partial_i, \qquad (***)$$

где $B_j = \partial_j x^j + L_{ij}$ и где величины L_{ij} рассматриваются как независимые коэффициенты, перестановочные с x^l, ∂_l при $l \neq i$, $l \neq j$. Действительно, подставляя биномы B_j и раскрывая скобки, получаем сумму всевозможных одночленов вида

$$x^k\partial_{j_1}x^{j_1}\partial_{j_2} \ldots x^{j_s}\partial_i = E_{kj_1}E_{j_1j_2} \ldots E_{j_si}$$

---

*) Отсюда очевидно также рекуррентное соотношение $\nabla = 1 + X\nabla$, т. е.

$$\sum_{j=i}^{k-1} X_{kj}\nabla_{ji} = \nabla_{ki}.$$

с коэффициентами $c_{i_1 i_2 \ldots i_s}$. Нетрудно видеть также, что биномы B_j в формуле (***) можно считать взаимно перестановочными.

Мы будем теперь рассматривать операторы ∇_{ki} не только на старшем векторе f_0, но во всем пространстве представления $d(\alpha)$.

Лемма 7. *Операторы ∇_{ki} взаимно перестановочны при фиксированном k.*

Доказательство. Заметим вначале, что всякий операторный полином, содержащий только понижающие (либо только повышающие) операторы E_{ij}, можно заменить полиномом от x^i, ∂_j, располагая эти операторы в произвольном порядке, но снабжая x^i, ∂_j, входящие в один и тот же элемент E_{ij}, каким-либо общим индексом, скажем $x^i(s)$, $\partial_j(s)$. При этом мы используем соотношение коммутации

$$[\partial_i(s),\ x^j(t)] = \delta(s,\ t),$$

где символ $\delta(s, t)$ означает символ Кронекера пары s, t (и операторы $\partial_j(s)$, $x^i(t)$ взаимно перестановочны при $i \neq j$). Кроме того, выражение, полученное после перестановки символов x^i, ∂_j, подлежит следующему правилу расшифровки: оператор E_{ij} располагается левее (правее) E_{jk}, если ∂_j стояло левее (правее) x^j.

Условимся также рассматривать L_{ij} как независимые символы, взаимно перестановочные между собой и удовлетворяющие следующим соотношениям коммутации:

$$[L_{ij},\ \partial_j] = [\partial_j,\ L_{ji}] = \partial_j, \quad [L_{ij},\ x^j] = [x^j,\ L_{ji}] = -x^j.$$

(Эти правила вытекают из прежнего определения $L_{ij} = E_{ii} - E_{jj} + (j - i)$*).) Тогда операторы ∇_{ki} мы можем рассматривать как полиномы от понижающих операторов с коэффициентами, зависящими от L_{ij}. При $i > l$ имеем

$$\nabla_{ki}\nabla_{kl} = (x^k)^2 \left\{ \prod_{j=i+1}^{k-1} B_j \tilde{B}_j \right\} \partial_i \tilde{B}_i \left\{ \prod_{s=l+1}^{i-1} \tilde{B}_s \right\} \partial_l.$$

---

*) Иначе говоря, $[E_{ii}, x^i] = x^i$, $[E_{ii}, \partial_i] = -\partial_i$ и все остальные коммутаторы равны нулю. Следовательно, оператору x^i приписывается вес δ_i и оператору ∂_j — вес δ_j^{-1}.

Действительно, все сомножители взаимно перестановочны, за исключением пар $(B_j, \tilde{B}_j)$ и $(\partial_i, \tilde{B}_i)$, где $B_j = \partial_j x^j + L_{ij}$, $\tilde{B}_j = \partial_j x^j + L_{ij}$. Снабжая символы ∂_j, x^i, входящие в эти выражения, индексами 1, 2, 3, 4, мы имеем

$$B_j\tilde{B}_j = \partial_j^2 (x^j)^2 - \delta(2,\ 3)\,\partial_j(1)\,x^j(4) + \ \ldots,$$

где многоточие означает сумму членов, не зависящих от порядка умножения B_j, $\tilde{B}_j$. В то же время

$$\tilde{B}_j B_j = \partial_j^2 (x^j)^2 - \delta(1,\ 4)\,\partial_j(3)\,x^j(4) + \ \ldots$$

В первом случае расшифровка приводит к произведению $\delta(2, 3) E_{pj} E_{jq}$, где $p > j > q$; во втором случае — к произведению $\delta(1, 4)\ E_{p'j} E_{jq'}$, где $p' > j > q'$. Однако и в первом и во втором случае под знаком $\nabla_{ki}\nabla_{kl}$ предполагается суммирование по p, $q\,(p', q')$. Следовательно, B_j и $\tilde{B}_j$ можно менять местами. Аналогично рассматривается пара $(\partial_i, \tilde{B}_i)$ *). В результате $\nabla_{ki}\nabla_{kl} = \nabla_{kl}\nabla_{ki}$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Между операторами ∇_{ki} имеет место следующее рекуррентное соотношение*:

$$\nabla_{ki} = E_{k,\,k-1}\nabla_{k-1,\,i} L_{i,\,k-1} - L_{i,\,k-1}\nabla_{k-1,\,i} E_{k,\,k-1}. \qquad (****)$$

Доказательство. Вычисляя коммутатор $[E_{k,\,k-1},\ \nabla_{k-1,\,i}]$, где $\nabla_{k-1,\,i}$ определяется согласно лемме 6 находим, что

$$[E_{k,\,k-1},\ \nabla_{k-1,\,i}] = \sum c_{j_1 j_2 \ldots j_s} E_{kj_1} E_{j_1 j_2} \ldots E_{j_s i}.$$

Действительно, $[E_{k,\,k-1},\ E_{k-1,\,j_1}] = E_{kj_1}$ и все остальные коммутаторы равны нулю. Полученное выражение отличается от ∇_{ki}, поскольку индексы $j_1, j_2, \ldots, j_s$ принимают лишь значения $i+1,\ i+2,\ \ldots,\ k-2$. Однако, умножая этот коммутатор слева на $L_{i,\,k-1}$ и добавляя $E_{k,\,k-1}\nabla_{k-1,\,i}$, получаем ∇_{ki}. Следовательно,

$$\nabla_{ki} = L_{i,\,k-1}\,[E_{k,\,k-1},\ \nabla_{k-1,\,i}] + E_{k,\,k-1}\nabla_{k-1,\,i},$$

что является лишь другой формой записи (****).

---

*) При этом учитывается равенство $\partial_i L_{li} = L_{li}\partial_i - \partial_l$.

Лемма 9. *Операторы ∇_{ki} оставляют инвариантным подпространство V_{k-1}, натянутое на старшие векторы относительно подгруппы G_{k-1}.*

Доказательство. Рассмотрим повышающий оператор $P_j = E_{j-1,\,j}$ и докажем вначале, что

$$P_j\nabla_{ki} = XP_j,$$

где $j \neq k$ и X — полином от операторов E_{pq}, зависящий от i, j, k. Не ограничивая общности, можем считать, что $i = 1$. Очевидно, P_j перестановочен с ∇_{k1} при $k = 1, 2, \ldots, j-2$, т. е. в этом случае наше тождество доказано ($X = \nabla_{k1}$). Остальные коммутаторы мы можем вычислить рекуррентно при помощи тождества (****). При этом $[P_j, \nabla_{j-1,\,i}] = 0$, но при $k = j$ имеем

$$P_j\nabla_{j1} = XP_j + L_{1j}\nabla_{j-1,\,i}.$$

Тем не менее при $k = j + 1$ наше тождество снова восстанавливается (несложные преобразования мы опускаем), и дальше уже без труда проходит индукция по k.

Пространство V_{k-1} может быть охарактеризовано как нуль-пространство операторов P_j при $j = 2, 3, \ldots, k-1$. Если $\xi \in V_{k-1}$, то мы имеем

$$P_j\nabla_{ki}\xi = XP_j\xi = 0,$$

т. е. $\nabla_{ki}\xi \in V_{k-1}$. Лемма доказана.

Следствие. *Оператор*

$$\nabla_\nu = \prod_{i=1}^{n-1} \nabla_{ni}^{\nu_i}, \qquad 0 \leqslant \nu_i \leqslant r_i,$$

отличается лишь скалярным множителем от Z-мультипликатора

$$Z_\nu = \prod_{i=1}^{n-1} Z_{ni}^{\nu_i}, \qquad 0 \leqslant \nu_i \leqslant r_i,$$

в применении к старшему вектору f_0 представления $d(\alpha)$.

Действительно, оба эти оператора являются весовыми и имеют одинаковый вес; следовательно, оба они переводят f_0 в старшие векторы подгруппы G_{n-1} с одним и тем же весом. Но тогда

$$\nabla_\nu f_0 = \lambda_\nu Z_\nu f_0$$

ввиду единственности этого веса (теорема 2). Константу λ_ν нетрудно вычислить при помощи леммы 6.

Действительно, ввиду коммутативности операторов $\Gamma_i = \nabla_i^{\nu_i}$ мы можем применить их к вектору f_0 в порядке возрастания индексов i:

$$\nabla_\nu f_0 = \Gamma_{n-1}\Gamma_{n-2} \ldots \Gamma_2\Gamma_1 f_0.$$

При этом все возникающие множители вида

$$z_{in} = \frac{[1, 2, \ldots, i-1, n]}{[1, 2, \ldots, i-1, i]}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

являются константами по отношению к последующим дифференцированиям Γ_p, $p > i$, которые согласно лемме 6 порождаются только операторами E_{kj}, $k > j > i$. Следовательно, можно применять Γ_p непосредственно к вектору f_0, и мы получаем, что

$$\lambda_\nu = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{n-1},$$

где γ_i — собственное значение Γ_i на f_0. Для вычисления γ_i мы снова пользуемся леммой 6, согласно которой

$$\gamma_i = \sum_{j=i+1}^{n} (l_i - l_j - 1) \qquad \text{при } \nu_i = 1.$$

Поскольку минор, стоящий в числителе z_{in}, является константой по отношению к дифференцированию ∇_{ni}, дальнейшее применение этого оператора равносильно его применению к вектору

$$f_0' = \frac{f_0}{[1, 2, \ldots, i]},$$

который снова является старшим с сигнатурой $(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \ldots, m_n)$. Понижая

последовательно m_i до $\tilde{m}_i = m_i - \nu_i$, заключаем, что

$$\gamma_i = \prod_{\delta=1}^{\nu_i} \prod_{j=i+1}^{n} (l_i - l_j - \delta) = \prod_{j=i+1}^{n} \frac{(l_i - l_j - 1)!}{(\tilde{l}_i - l_j - 1)!},$$

где $\tilde{l}_i = l_i - \nu_i$. Перемножая эти величины при $i = 1, 2, \ldots, n-1$, получаем окончательную формулу:

$$\lambda_\nu = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{(l_i - l_j - 1)!}{(\tilde{l}_i - l_j - 1)!}.$$

В частности, мы видим, что $\lambda_\nu \neq 0$ при $0 \leqslant \nu_i \leqslant r_i$. Следовательно, операторы ∇_ν порождают (при действии на f_0) все подпространство V_{n-1}, состоящее из собственных векторов относительно G_{n-1}.

Теперь открывается возможность индукции по n, и мы заключаем, что имеет место

Теорема 5. *Всякий базисный вектор Гельфанда — Цейтлина может быть представлен в виде*

$$e_\mu = \frac{1}{N_\mu} \Omega_\mu f_0,$$

где N_μ — нормирующий множитель и оператор Ω_μ является полиномом от понижающих и диагональных операторов E_{ij}:

$$\Omega_\mu = \prod_{n \geqslant k > i \geqslant 1} \nabla_{ki}^{m_{ik} - m_{i,\,k-1}},$$

где явный вид оператора ∇_{ki} дается леммой 6 и где оператор ∇_{ki} расположен левее ∇_{lj}, если $k < l$ (при $k = l$ такие операторы перестановочны).

Замечание 1. Поскольку операторы ∇_{kj} коллинеарны Z_{kj}, вообще говоря, лишь при $k = n$, нам остается неизвестным явный вид полиномов $e_\mu(z)$ в реализации на группе Z.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 5 мы пользовались явными моделями неприводимого представления $d(\alpha)$. Однако полученный результат выражается в терминах инфинитезимальных операций и, следовательно, универсален в том отношении, что не зависит от частной реализации $d(\alpha)$.