§ 71. Матричные элементы $d(\alpha)$

В заключение этой главы укажем простую общую формулу для матричных элементов $d(\alpha)$. Мы определяем эти элементы из разложения

$$T_g e_\nu = \sum_\mu \tau_{\mu\nu}(g)\, e_\mu,$$

где e_μ — ортонормальный базис Гельфанда — Цейтлина. Нетрудно видеть, что производящая функция $\alpha(g)$ является одним из таких элементов:

$$\alpha(g) = (T_g e_0,\ e_0),$$

где индекс 0 нумерует старший вектор $d(\alpha)$. Действительно, условие $\overset{*}{E}_{ij} = E_{ji}$ означает, в частности*), что эрмитово сопряжение переводит преобразования группы Z_- в преобразования группы Z_+; следовательно, $(T_g e_0,\ e_0) = (T_\delta T_z e_0,\ T^*_\zeta e_0) = (T_\delta e_0,\ e_0) = \alpha(\delta) = \alpha(g)$. Условие

$$\alpha(\zeta g z) = \alpha(g)$$

показывает, что функция $\alpha(g)$ является старшим вектором относительно двусторонних сдвигов $f(g) \to f(g_1' g g_2)$ на группе G. Поскольку линейная оболочка функций $\tau_{\mu\nu}(g)$ неприводима относительно этих сдвигов, то ясно, что всякая такая функция может быть получена из $\alpha(g)$ посредством понижающих операторов.

Нам будет удобно ввести несколько необычные обозначения для инфинитезимальных операторов левого и правого сдвигов на G. Условимся операторы левого сдвига записывать слева, а операторы правого сдвига — справа от функции $f(g)$, полагая соответственно, что в записи fAB оператор A действует раньше B. Положим

$$\widehat{E}_{ik} f(g) = g_i \frac{\partial}{\partial g_k} f(g), \quad f(g)\, E_{ki} = f(g) \frac{\partial}{\partial g^k} g^i,$$

---

*) Для операторов T_g это условие означает, очевидно, что $T^*_g = T_{g^*}$, т. е. $T'_g = T_{g'}$, где штрих означает транспонирование в базисе Гельфанда — Цейтлина.

где g_i означает i-ю строку и g^i — i-й столбец матрицы g (элементы этой матрицы рассматриваются как независимые переменные). Тогда операторы $\widehat{E}_{ik}$, E_{ki} являются, образно говоря, «операторами подстановки» индекса i вместо индекса k. Для выяснения вопроса, какие из этих операторов являются повышающими и какие понижающими, удобнее всего использовать явный вид α-функции:

$$\alpha(g) = \prod_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1i} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{i1} & \dots & g_{ii} \end{vmatrix}^{r_i},$$

откуда видно, что операторы E^*_{ik}, E_{ki} аннулируют эту функцию при $i < k$. Следовательно, операторы, «понижающие индекс», нам приходится рассматривать как повышающие *). Положим теперь

$$\widehat{\nabla}_{ki} = \sum_{j_1 > j_2 > \dots > j_s} c_{j_1 j_2 \dots j_s} \widehat{E}_{kj_1} \widehat{E}_{j_1 j_2} \dots \widehat{E}_{j_s i}, \qquad k > i,$$

$$\nabla_{ik} = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_s} E_{ij_1} E_{j_1 j_2} \dots E_{j_s k} \cdot c_{j_1 j_2 \dots j_s}, \quad i < k,$$

где коэффициенты $c_{j_1 j_2 \dots j_s}$ в обеих формулах одни и те же **):

$$c_{j_1 j_2 \dots j_s} = \prod_{i<j<k} L_{ij}.$$

Напомним, что $L_{ij} = L_i - L_j$, где $L_i = E_{ii} - i$. Для каждой схемы $\mu = \{m_{ki}\}$ рассмотрим всевозможные разности $r_{ki} = m_{ki} - m_{k-1,\,i}$ и положим ***)

$$\widehat{P}_\mu = \prod_{n \geqslant k > i \geqslant 1} \nabla_{ki}^{r_{ki}}, \quad P_\mu = \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \nabla_{ik}^{r_{ki}}.$$

---

*) Это несколько неудобное соглашение вызвано желанием конструировать α-функцию из диагональных миноров с индексами 1, 2, ..., p.

**) Напомним, что эти коэффициенты перестановочны со всеми операторами E_{jl}, кроме $E_{j_s i}$.

***) При этом операторы $\widehat{\nabla}_{ki}$ располагаются левее $\widehat{\nabla}_{lj}$, если $k < l$, а для операторов ∇_{ik} имеется в виду обратный порядок следования.

Теорема 8. *Произвольный матричный элемент* $\tau_{\mu\nu}(g)$ *представления* $d(\alpha)$ *может быть выражен в виде*

$$\tau_{\mu\nu}(g) = \frac{1}{N_\mu N_\nu} \hat{P}_\mu \alpha(g) P_\nu,$$

где $\alpha(g)$ — *производящая функция* $d(\alpha)$ *и* N_μ, N_ν — *нормировочные множители, явный вид которых дается теоремой* 6.

Доказательство. Формула

$$\tau_{\mu\nu}(gh) = \sum_\lambda \tau_{\mu\lambda}(g)\tau_{\lambda\nu}(h)$$

показывает, что каждая строка матрицы $\|\tau_{\mu\nu}\|$ преобразуется согласно $d(\alpha)$ при правых сдвигах $g \to gh$. В частности,

$$\alpha(gh) = \sum_\mu \tau_{0\mu}(g)\tau_{\mu 0}(h),$$

откуда ясно, что функции $e_\mu(g) = \tau_{0\mu}(g)$ преобразуются по закону ортонормального базиса в $d(\alpha)$. Следовательно,

$$\tau_{0\mu}(g) = \frac{1}{N_\mu} \alpha(g) P_\mu,$$

и функции $\tau_{\mu 0}(g) = \tau_{0\mu}(g')$ *) выражаются аналогичным образом через операторы левого сдвига:

$$\tau_{\mu 0}(g) = \frac{1}{N_\mu} \hat{P}_\mu \alpha(g).$$

В свою очередь каждая из этих функций является старшим вектором для строки $\tau_{\mu\nu}(g)$. Следовательно,

$$\tau_{\mu\nu}(g) = \frac{1}{N_\mu N_\nu} \hat{P}_\mu \alpha(g) P_\nu.$$

Теорема доказана.

Напомним, что согласно глобальной теореме функции $\tau_{\mu\nu}(g)$ взаимно ортогональны по отношению к скалярному произведению

$$(f, \varphi) = \int f(u)\overline{\varphi(u)}\, du,$$

---

*) См. сноску на стр. 325.

где интеграл берется только по подгруппе $U(n)$. Операции $g \to u_0 g$, $g \to g u_0$, $u_0 \in U(n)$, унитарны по отношению к этому скалярному произведению. Если считать, что мера Хаара du нормирована условием $\int du = 1$, то

$$\| \tau_{\mu\nu}(g) \| = N^{-1/2},$$

где $N = N(\alpha)$ — размерность представления $d(\alpha)$. Однако при фиксированном α мы можем перенормировать эту меру таким образом, чтобы $\|\tau_{\mu\nu}(g)\| = 1$.

Полученная формула для $\tau_{\mu\nu}(g)$ является дифференциальной формулой типа формулы Родрига для полиномов Лежандра. Мы можем записывать эту формулу несколько иначе. Прежде всего, имеем

Следствие 1. *Если выбрать в группе G параметры (на всюду плотном множестве) при помощи «инверсного разложения Гаусса» $g = z\delta\zeta$, то*

$$\tau_{\mu\nu}(z\delta\zeta) = \frac{1}{N_\mu N_\nu} \hat{P}_\mu \alpha(z\delta\zeta) P_\nu,$$

где операторы $\hat{E}_{ki}$, $k \neq i$, действуют только на параметры z и операторы E_{ik}, $k \neq i$, действуют только на параметры ζ.

Действие диагональных операторов $L_{ij} = E_{ii} - E_{jj} + (j - i)$ проще всего учитывать, не выполняя дифференцирования, но вычисляя вес вектора, к которому они применяются. Если принять такое соглашение, то мы получаем также

Следствие 2. *Значение функции $\tau_{\mu\nu}(g)$ в произвольной точке $g \in G$ может быть вычислено следующим образом:*

$$\tau_{\mu\nu}(g) = \frac{1}{N_\mu N_\nu} \hat{P}_\mu \alpha(zg\zeta) P_\nu |_{z=\zeta=e},$$

где $\hat{P}_\mu$, P_ν рассматриваются соответственно как дифференциальные операторы по параметрам z и ζ.

Наконец, поскольку в этой формуле дифференциальные операторы применяются только в точке e, естественно попытаться заменить $\hat{E}_{ji}$, E_{ij} на их значения в единичной точке, т. е. на $\frac{\partial}{\partial \zeta_{ji}}$,

$\frac{\partial}{\partial z_{ij}}$ соответственно. Заметим, например, что оператор $\widehat{\nabla}_{ki}$ может быть переписан в виде

$$\widehat{\nabla}_{ki} = \sum_{j_1 > j_2 > \ldots > j_s} E_{j_s i} E_{j_{s-1} j_s} \ldots E_{j_1 j_2} E_{k j_1} \tilde{c}_{j_1 j_2 \ldots j_s} =$$

$$= \sum_{j_1 > j_2 > \ldots > j_s} g_{j_1} g_{j_2} \ldots g_{j_s} g_k \frac{\partial}{\partial g_{j_1}} \frac{\partial}{\partial g_{j_2}} \ldots \frac{\partial}{\partial g_{j_s}} \frac{\partial}{\partial g_i} \tilde{c}_{j_1 j_2 \ldots j_s}.$$

Такая запись была получена нами при доказательстве леммы 10 (через биномы $\widetilde{B}_j$). Теперь, поскольку все операторы умножения собраны слева, мы можем без труда положить $g = e$, т. е. заменить g_j на $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. В результате получаем оператор

$$\widehat{\nabla}^0_{kt} = \sum_{j_1 > j_2 > \ldots > j_s} \frac{\partial}{\partial g_{j_s t}} \frac{\partial}{\partial g_{j_{s-1}, j_s}} \ldots \frac{\partial}{\partial g_{k j_1}} \tilde{c}_{j_1 j_2 \ldots j_s},$$

который по-прежнему может быть переписан в виде

$$\nabla^0_{kt} = \sum_{j_1 > j_2 > \ldots > j_s} c_{j_1 j_2 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial g_{k j_1}} \frac{\partial}{\partial g_{j_1 j_2}} \ldots \frac{\partial}{\partial g_{j_s t}}.$$

Здесь коэффициенты $\tilde{c}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ легко вычисляются из «весовых» соображений (они отличаются от $c_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ заменой каждого множителя L_{ij} на $L_{ij} + 1$). Подобную операцию можно произвести и над всем произведением $\widehat{P}_\mu(P_\nu)$. Однако останавливаться на этом подробно не будем.

Мы уже видели в гл. V, что функции $\tau_{\mu\nu}(g)$ при $n = 2$ выражаются через полиномы Якоби. Несомненно, представляет интерес исследование этих функций при произвольном n в терминах классической теории специальных функций.

* * *

В этой главе мы собрали основную информацию о строении неприводимого представления $d(\alpha)$. Ключом к получению этих результатов являются для нас индикаторные системы, построенные автором в 1961 г. ([83], [84]). Однако выбор базиса в пространстве $d(\alpha)$ и явные формулы для инфинитезимальных операторов в этом базисе были предложены И. М. Гельфандом и М. Л. Цейтлиным [72] еще в 1950 г. Эти авторы предлагают готовый ответ на задачу, справедливость которого может быть проверена, например,

путем непосредственного вычисления соотношений коммутации. Редукция с группы на подгруппу не указана в этой работе явно, но достаточно очевидна из структуры параметров, определяющих базисные векторы. Наш подход состоит в предварительном доказательстве теоремы о редукции, откуда удается получить не только матричные элементы инфинитезимальных операторов, но и структуру операторов понижения.

Понижающие операторы были найдены первоначально также в статье [84]. Вслед за тем в работе [142] эти операторы были выражены через операторы рождения и уничтожения, и также найдена нормировка базисных векторов. Мы использовали символику, предложенную в [142], при вычислении соотношений коммутации между операторами ∇_{ki} и также частично следовали этой работе при вычислении нормирующих множителей (§ 69). Близкие результаты были получены в [155]. Формула типа Родрига для матричных элементов была получена в [84]. Недавно И. М. Гельфанд и М. И. Граев [66] получили выражение для матричных элементов через обобщенные «бета-функции».

Заметим, что индикаторные системы действуют далеко не в полную силу при доказательстве теоремы о редукции. В действительности в этом доказательстве достаточно было бы использовать гораздо более простой критерий (см. сноску на стр. 298). Однако в следующих двух главах мы укажем дальнейшие приложения индикаторных систем. В гл. XVI дается построение индикаторных систем для каждой надкомпактной группы Ли.