либо по всей группе Г. Окончательно имеем

$$\int f\,du = \frac{\int \Delta\bar{\Delta} f\,d\varphi}{\int \Delta\bar{\Delta}\,d\varphi},$$

где оба интеграла берутся по $n$-мерному тору Г: $0 \leqslant \varphi_i < 2\pi$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

## § 73. Примитивные характеры U($n$)

Характеры неприводимых представлений принято иногда называть *примитивными характерами*. В этом параграфе мы найдем примитивные характеры группы $U(n)$.

Для решения этой задачи достаточно использовать соотношения ортогональности для примитивных характеров, даваемые глобальной теоремой *):

$$\int \chi_\alpha \bar{\chi}_\beta\,du = \delta_{\alpha\beta}.$$

Здесь $\chi_\alpha$ — характер неприводимого представления $d(\alpha)$ и $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера для пары сигнатур $\alpha$, $\beta$. Поскольку подынтегральная функция есть функция классов, мы можем использовать для нее полученную в предыдущем параграфе формулу интегрирования. В результате получаем

$$\int X_\alpha \bar{X}_\beta\,d\varphi = N_0\delta_{\alpha\beta},$$

где $N_0$ — нормирующий множитель, равный $\int \Delta\bar{\Delta}\,d\varphi$, и где положено

$$X_\alpha = \chi_\alpha \cdot \Delta.$$

Для нас существенно, что функция $\chi_\alpha(\gamma) = \mathrm{sp}\,T_\gamma$ является полиномом от $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ (как сумма весов); кроме того, полином $\chi_\alpha$ симметричен относительно всех подстановок (как функция классов). В то же время функция $\Delta$ является антисимметрическим полиномом.

*) В действительности мы используем только условие нормировки при $\alpha = \beta$.

Следовательно, и $X_\alpha$ является антисимметрическим полиномом от $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Расположим все одночлены, входящие в полином $X_\alpha$, в лексикографическом порядке и заметим, что $X_\alpha = AX_\alpha$; где $A$ — оператор антисимметризации. Следовательно, $X_\alpha$ разлагается в сумму однородных антисимметрических слагаемых вида

$$S_k = \sum \pm \gamma_1^{k_1}\gamma_2^{k_2} \ldots \gamma_n^{k_n},$$

где сумма берется по группе подстановок (над элементами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$) и знак $\pm$ выбирается в зависимости от четности или нечетности подстановки. При этом слагаемое $S_k$ входит с целой кратностью $c_k$. Действительно, $\chi_\alpha$ и $\Delta$ имеют только целые коэффициенты; следовательно, то же верно и для функции $X_\alpha$. Интегрируя по группе $\Gamma$, получаем, что функции $S_k$ удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$\int S_k \overline{S}_l \, d\varphi = (2\pi)^n \cdot n! \delta_{kl},$$

где $\delta_{kl}$ — символ Кронекера для символов $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$. Заметим, что, в частности, $\Delta$ является антисимметрической суммой вида $S_{k_0}$, где $k_0 = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$. Следовательно,

$$N_0 = (2\pi)^n \cdot n!.$$

Далее, записывая функцию $X_\alpha$ в виде $\sum c_k S_k$ и используя соотношения ортогональности, находим (сокращая на $N_0$), что

$$\sum c_k^2 = 1.$$

Поскольку числа $c_k$ являются целыми, это возможно лишь в том случае, когда все они равны нулю, за исключением одного, который равен $\pm 1$.

Пусть $\gamma_1^{m_1}\gamma_2^{m_2} \ldots \gamma_n^{m_n}$ — старший член характера $\chi_\alpha$, $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$, где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — параметры сигнатуры $\alpha$. Тогда старшим членом $X_\alpha$ является $\gamma_1^{l_1}\gamma_2^{l_2} \ldots \gamma_n^{l_n}$, где положено

$$l_k = m_k + (n-k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Поскольку этот старший член входит с положительным коэффициентом, мы заключаем, что $c_l = +1$, и окончательно

$$X_\alpha = S_l.$$

В результате получена следующая

Теорема 1. *Всякий примитивный характер группы* U($n$) *имеет вид*

$$\chi_\alpha(u) = \frac{X_\alpha(\gamma)}{\Delta(\gamma)}, \qquad (*)$$

*где* $X_\alpha$ — *антисимметрический полином от* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, *который может быть записан в виде детерминанта:*

$$X_\alpha(\gamma) = \begin{vmatrix} \gamma_1^{l_1} & \gamma_1^{l_2} & \ldots & \gamma_1^{l_n} \\ \gamma_2^{l_1} & \gamma_2^{l_2} & \ldots & \gamma_2^{l_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_n^{l_1} & \gamma_n^{l_2} & \ldots & \gamma_n^{l_n} \end{vmatrix}, \qquad l_1 > l_2 > \ldots > l_n,$$

*и* $\Delta = X_{\alpha_0}$ *соответствует сигнатуре* $\alpha_0 = (0, 0, \ldots, 0)$ *). *Параметры* $l_k$ *связаны с параметрами сигнатуры* $\alpha$ *соотношениями*

$$l_k = m_k + (n-k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

*и* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — *собственные значения матрицы* $u \in$ U($n$).

Замечание. При доказательстве теоремы 1 мы не пользовались классификацией, изложенной в гл. VII. Более того, теорема 1 сама может быть использована для классификации неприводимых представлений группы U($n$). Действительно, формула (*) показывает, что функция $\chi_\alpha(\gamma)$ содержит старший вес

$$\gamma_1^{m_1}\gamma_2^{m_2} \ldots \gamma_n^{m_n}, \quad m_k = l_k + (n-k),$$

с кратностью 1. При этом $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$, и мы снова приходим к понятию сигнатуры. Поскольку в

*) Напомним также, что $\Delta(\gamma) = \prod_{i<j} (\gamma_i - \gamma_j)$.

силу глобальной теоремы различным представлениям должны отвечать линейно независимые характеры, мы получаем, что сигнатура определяет представления с точностью до эквивалентности.

Все изложенное построение принадлежит Г. Вейлю [10]. Формулу (*) мы будем называть *первой формулой Вейля* для характеров.

В заключение заметим, что значение характера $\chi(g)$ позволяет также вычислить размерность представления $N=\chi(e)$. Подстановка $\delta=e$ в первую формулу Вейля приводит к неопределенности 0/0, для раскрытия которой удобно положить $\varphi_1=(n-1)\varphi$, $\varphi_2=(n-2)\varphi$, ... ..., $\varphi_n=0\cdot\varphi$. При этом числитель (*) превращается в определитель Вандермонда чисел $\varepsilon_k=e^{il_k\varphi}$, который, как известно, равен произведению разностей $\varepsilon_p-\varepsilon_q$, $p<q$. Устремляя $\varphi$ к нулю, замечаем, что $\varepsilon_p-\varepsilon_q\approx\approx i(l_p-l_q)\varphi$. В результате

$$N_\alpha=\frac{\prod\limits_{1\leqslant p<q\leqslant n}(l_p-l_q)}{0!1!2!\ldots(n-1)!}.$$

Действительно, выражение в знаменателе есть произведение разностей $l_p^0-l_q^0$, $p<q$, где $l_k^0=n-k$, $k=1,2,\ldots,n$.

Полученная формула является одним из наиболее важных следствий теории характеров. Действительно, знание размерности обычно существенно для приложений.

## § 74. Весовая диаграмма $d(\alpha)$

Мы уже отмечали при вычислении характеров, что функция $\chi_\alpha(\gamma)=\operatorname{sp}T_\gamma$ представляет собой сумму всех весов представления $d(\alpha)$, записанных мультипликативно:

$$\chi_\alpha(\gamma)=\sum n_\lambda\cdot\lambda(\gamma).$$

Здесь $n_\lambda$ — кратность вхождения веса $\lambda$. Если $\lambda$ не содержится в спектре $d(\alpha)$, то мы полагаем $n_\lambda=0$. Положим

$$\lambda(\gamma)=\gamma_1^{\lambda_1}\gamma_2^{\lambda_2}\ldots\gamma_n^{\lambda_n}.$$