силу глобальной теоремы различным представлениям должны отвечать линейно независимые характеры, мы получаем, что сигнатура определяет представления с точностью до эквивалентности.

Все изложенное построение принадлежит Г. Вейлю [10]. Формулу (*) мы будем называть *первой формулой Вейля* для характеров.

В заключение заметим, что значение характера $\chi(g)$ позволяет также вычислить размерность представления $N=\chi(e)$. Подстановка $\delta=e$ в первую формулу Вейля приводит к неопределенности 0/0, для раскрытия которой удобно положить $\varphi_1=(n-1)\varphi$, $\varphi_2=(n-2)\varphi$, ..., $\varphi_n=0\cdot\varphi$. При этом числитель (*) превращается в определитель Вандермонда чисел $\varepsilon_k=e^{il_k\varphi}$, который, как известно, равен произведению разностей $\varepsilon_p-\varepsilon_q$, $p<q$. Устремляя φ к нулю, замечаем, что $\varepsilon_p-\varepsilon_q\approx\approx i(l_p-l_q)\varphi$. В результате

$$N_\alpha=\frac{\prod\limits_{1\leqslant p<q\leqslant n}(l_p-l_q)}{0!1!2!\ldots(n-1)!}.$$

Действительно, выражение в знаменателе есть произведение разностей $l_p^0-l_q^0$, $p<q$, где $l_k^0=n-k$, $k=1,2,\ldots,n$.

Полученная формула является одним из наиболее важных следствий теории характеров. Действительно, знание размерности обычно существенно для приложений.

§ 74. Весовая диаграмма $d(\alpha)$

Мы уже отмечали при вычислении характеров, что функция $\chi_\alpha(\gamma)=\operatorname{sp}T_\gamma$ представляет собой сумму всех весов представления $d(\alpha)$, записанных мультипликативно:

$$\chi_\alpha(\gamma)=\sum n_\lambda\cdot\lambda(\gamma).$$

Здесь n_λ — кратность вхождения веса λ. Если λ не содержится в спектре $d(\alpha)$, то мы полагаем $n_\lambda=0$. Положим

$$\lambda(\gamma)=\gamma_1^{\lambda_1}\gamma_2^{\lambda_2}\ldots\gamma_n^{\lambda_n}.$$

Таким образом, $n_\lambda = f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ есть неотрицательная целочисленная функция, отличная от нуля только в точках спектра $d(\alpha)$. Мы называем эту функцию (см. § 44) *весовой диаграммой* $d(\alpha)$.

Вместо группы $U(n)$ удобно рассматривать $SU(n)$, поскольку «геометрические свойства» спектра при этом, в сущности, не меняются. Полагая $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = c_0$, мы получаем систему параллельных гиперплоскостей в n-мерном пространстве. Для группы $SU(n)$ весовая диаграмма не зависит от c_0 при условии параллельного переноса

$$\lambda_k \to \lambda_k + t, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

В частности, мы можем положить $c_0 = 0$ и рассматривать весовую диаграмму только на этой гиперплоскости.

Первая формула Вейля дает нам непосредственный способ для вычисления весовой диаграммы, однако, к сожалению, слишком сложный. Действительно, деление в (*) § 73 практически легко производится в общем виде лишь при $n = 2$. Полагая для группы $SU(2)$ $\gamma_1 = \gamma_2^{-1} = \gamma$, мы имеем

$$X_\alpha = \gamma^{l_1 - l_2} - \gamma^{l_2 - l_1}.$$

Заметим, что $l_1 - l_2 = m_1 - m_2 + 1$, где m_1, m_2 — параметры сигнатуры α. В гл. V мы положили $m_1 - m_2 = 2l$, где l — полуцелое или целое число. Следовательно, $l_1 - l_2 = 2l + 1$. Заметим также, что $\Delta = \gamma - \gamma^{-1}$. В результате

$$\chi_\alpha = \frac{\gamma^{2l+1} - \gamma^{-(2l+1)}}{\gamma - \gamma^{-1}} = \frac{\sin(2l+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

где положено $\gamma = e^{i\varphi}$. Для вычисления весовой диаграммы достаточно заметить, что

$$\chi_\alpha = \gamma^{-2l} + \gamma^{-2(l-1)} + \ldots + \gamma^{2(l-1)} + \gamma^{2l}.$$

Мы снова получаем хорошо известный результат (гл. V): весовая диаграмма отлична от нуля только в точках $-l, -l+1, \ldots, l$ (при соответствующем выборе масштаба), и в этих точках она равна единице. Очевидно, что, и обратно, знание весовой диаграммы позволяет

в данном случае получить выражение для характера элементарным способом, без привлечения теории интегрирования.

Рассмотрим теперь случай $n = 3$, т. е. $G = \mathrm{SU}(3)$. Весовую диаграмму $d(\alpha)$, $\alpha = (m_1, m_2, m_3)$, мы будем рассматривать на плоскости $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{const}$. Спроектируем на эту плоскость оси $O\lambda_1$, $O\lambda_2$, $O\lambda_3$ так, чтобы их положительные направления расположились под углом 120°. Тогда вся плоскость разбивается на шесть секторов с вершинами в начале координат и с углами 60° (рис. 3).

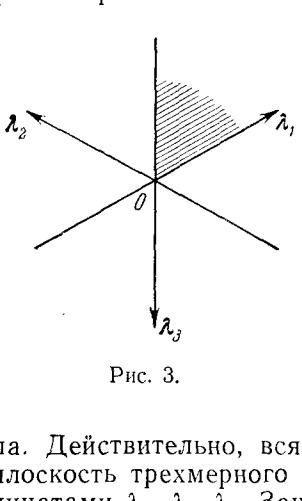

Рис. 3.

Пусть e_1, e_2, e_3 — проекции единичных векторов, направленных вдоль $O\lambda_1$, $O\lambda_2$, $O\lambda_3$ соответственно. Всякий вес изображается точкой вида $n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3$, где n_1, n_2, n_3 — произвольные целые числа. Действительно, всякий вес есть проекция на нашу плоскость трехмерного вектора с целочисленными координатами λ_1, λ_2, λ_3. Заштрихованный сектор выделяется условием $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$; только в этом секторе могут располагаться старшие веса.

Напомним теперь, что всякий вес представления $d(\alpha)$ может быть записан в виде $\alpha - \sum_{i=1}^{2} k_i\omega_i$, где $\omega_1 = e_1 - e_2$ и $\omega_2 = e_2 - e_3$ — корни в алгебре $\mathrm{sl}(3)$ и k_1, k_2 — неотрицательные целые числа. Вычитанию вектора ω_1 соответствует горизонтальное движение налево на нашей диаграмме, и вычитанию вектора ω_2 соответствует движение по направлению $e_3 - e_2$.

Напомним также, что диаграмма весов должна быть симметрична относительно группы Вейля. В нашем случае группа Вейля порождается отражениями относительно осей $O\lambda_1$, $O\lambda_2$, $O\lambda_3$.

Для построения весовой диаграммы мы используем реализацию $d(\alpha)$ на группе Z. Согласно общим резуль-

татам гл. VII пространство представления натянуто на векторы

$$\alpha(z, g) = (a + bx + cy)^p (a' + b'x' + c'y')^q,$$

где $p = m_1 - m_2$, $q = m_2 - m_3$, a, b, c, a', b' c' — некоторые константы и x, y, x', y' — функции на группе Z, связанные соотношением

$$y + xx' + y' = 0. \qquad (*)$$

Действительно, мы полагаем (в обозначениях $z = \|z_{ij}\|$) $x = z_{12}$, $y = z_{13}$, $x' = -z_{23}$, $y' = -z_{13} + z_{12}z_{23}$. Полином $\alpha(z, g)$ разлагается по одночленам от x, y, x', y'; при этом, учитывая формулу $(*)$, мы можем понижать степени этих одночленов, заменяя xx' на $-y-y'$. Следовательно, $\alpha(z, g)$ разлагается по одночленам вида

$$\theta^{\pm}_{kls} = y^k y'^l \varphi^{\pm}(s),$$

где положено $\varphi^+(s) = x^s$, $\varphi^-(s) = x'^s$. Действительно, указанная выше операция понижения приводит к одному из этих одночленов. Для одночленов θ^- мы имеем следующие ограничения на показатели:

$$0 \leqslant k \leqslant p, \quad 0 \leqslant l + s \leqslant q.$$

Точно так же для одночленов θ^+ мы имеем ограничения

$$0 \leqslant k + s \leqslant p, \quad 0 \leqslant l \leqslant q.$$

С другой стороны, используя индикаторную систему (гл. X), легко проверяем, что все одночлены с такими ограничениями сами содержатся в пространстве представления $d(\alpha)$. Поскольку эти одночлены линейно независимы, мы получаем базис в пространстве представления $d(\alpha)$.

Теперь остается найти веса всех базисных одночленов. Отнесем одночлен $\theta^{\pm}$ к серии S^0, если $s = 0$, и введем для него в этом случае обозначение

$$\theta^0_{kl} = y^k y'^l.$$

Одночлены θ^-, $s \neq 0$, и θ^+, $s \neq 0$, отнесем соответственно к сериям S^- и S^+. Заметим, что

$$\theta^+_{kls} = x^s \theta^0_{kl}, \quad \theta^-_{kls} = x'^s \theta^0_{kl}.$$

Одночлены x, y, x', y' являются мультипликаторами на группе Z в смысле гл. X. При этом первым двум из них отвечают соответственно мультипликаторы $\gamma_1^{-1}\gamma_2$, $\gamma_2^{-1}\gamma_3$ в классе весов, а последним двум отвечает один и тот же мультипликатор $\gamma_1^{-1}\gamma_3$. Иначе говоря, умножению на x, x' отвечает вычитание векторов ω_1, ω_2 (соответственно), в то время как умножению на y, y' отвечает вычитание одного и того же вектора $\omega_1 + \omega_2 = e_1 - e_3$.

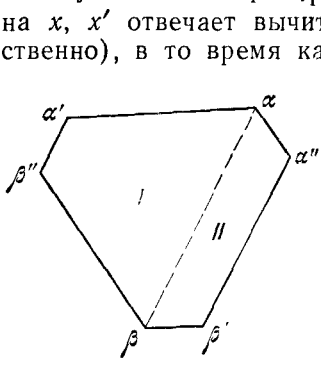

Рис. 4.

Используя все эти правила и ограничения на показатели k, l, s, нетрудно завершить наше построение. Фиксируем точку $\alpha = (m_1, m_2, m_3)$ в заштрихованном секторе на рис. 3 и построим шесть точек $s\alpha$, где s — элемент группы Вейля. Соединяя все эти точки прямыми линиями, получаем, как показано на рис. 4, выпуклый шестиугольник. Умножение на y, y' соответствует движению вдоль пунктирной линии в направлении от α к β. Умножение на θ_{kl}^0 равносильно вычитанию вектора $m(e_1 - e_3)$, где $m = k + l$. Полагая $m = 0, 1, 2 \ldots$, получаем соответствующие кратности весов:

$$1, 2, 3, \ldots, k_0 - 1, k_0, k_0, \ldots, k_0, k_0 - 1, \ldots, 3, 2, 1.$$

Действительно, для вычисления этих кратностей достаточно найти число мультипликаторов θ_{kl}^0 с фиксированной суммой $m = k + l$. При этом учитываются ограничения $0 \leqslant k \leqslant p$, $0 \leqslant l \leqslant q$. Отсюда легко получить, что $m_0 = p + q$ (максимальное из чисел, для которых точка $\beta = \alpha - m_0(e_1 - e_3)$ еще является весом) и $k_0 = \min(p, q) + 1$. Аналогично производится вычисление весов для всех остальных мультипликаторов $\theta^{\pm}$. При этом сериям S^+, S^- отвечают на рис. 4 точки лежащие в областях I, II соответственно.

Окончательный результат выглядит следующим образом. Соединим вершины (α, β), (α', β'), (α'', β''), объединенные попарно, отрезками прямых линий. Тогда

в пересечении образуется треугольник, который обозначим Δ. Кратность n_λ равна единице на границе всего шестиугольника, возрастает линейно (с шагом единица) при движении к центру и принимает максимальное постоянное значение на треугольнике Δ (внутри и на его границе). Это максимальное значение есть

$$k_0 = \min(p, q) + 1.$$

Нетрудно также выделить линии уровня $n_\lambda = \text{const}$; они представляют собой систему вложенных шестиугольников, которые, начиная с некоторого момента, вырождаются в треугольники и (в некоторых случаях) даже в точку. Для доказательства достаточно заметить, что движение от α к α' осуществляется мультипликатором x и движение от α к α'' осуществляется мультипликатором x'. Применение таких мультипликаторов не изменяет кратности.

На рис. 5 приводится весовая диаграмма в случае $\alpha = (7, 2, 0)$. В этом случае $\alpha' = (2, 7, 0)$, $\beta'' = (0, 7, 2)$, $\beta = (0, 2, 7)$, $\beta' = (2, 0, 7)$, $\alpha'' = (7, 0, 2)$. Кратности n_λ указаны цифрами у линий постоянства. Эти кратности равны 1 вдоль внешнего шестиугольника, 2 вдоль следующего шестиугольника, 3 вдоль треугольника и 3 в начале координат.

В общем случае нетрудно показать, что линии постоянства выделяются уравнениями вида $\|x\| = \text{const}$, где положено

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3} \left| x_i - \frac{m_1 + m_3}{2} \right|$$

для вектора $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ *). В той части, где кратность $n_\lambda = f(\lambda)$ меняется линейно, она задается формулой

$$n_\lambda = \|\alpha\| - \|\lambda\| + 1.$$

Здесь $\alpha = (m_1, m_2, m_3)$ — сигнатура представления. Максимальное значение кратности в области постоянства было приведено ранее.

---

*) При этом должно соблюдаться условие $x_1 + x_2 + x_3 = m_1 + m_2 + m_3$. В частности, $\|x\| = \max|x_i|$, если сигнатура α нормирована условием $m_1 + m_3 = 0$.

Предлагается в качестве упражнения получить описание весовой диаграммы для SU(3) другим способом, используя сужение на SU(2) (см. § 66).

Тем самым в случае $n = 3$ мы получаем окончательный результат. Характер χ_α и кратности n_λ вычисляются

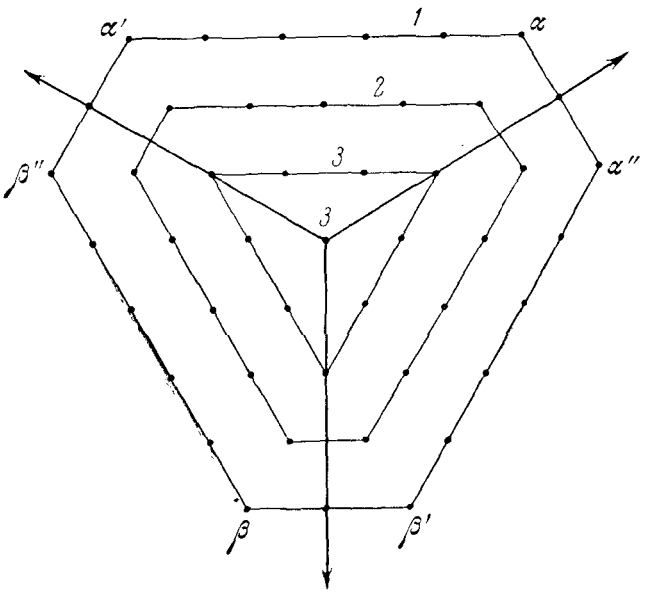

Рис. 5.

элементарным способом. Разумеется, и в общем случае метод Z-мультипликаторов дает известную информацию о весовой диаграмме, но структура этой диаграммы является значительно более сложной.

Мы вернемся к данному вопросу в гл. XVII. Пока займемся описанием еще одного аналитического выражения для характера χ_α произвольной группы $U(n)$.

Упражнения

1. Пусть $\Lambda(\alpha)$ — весовая диаграмма $d(\alpha)$. Показать, что $\Lambda(\alpha)$ содержится в выпуклом множестве, натянутом на точки $s\alpha$, где s — произвольная перестановка координат вектора α.

2. Показать, что указанное выше выпуклое множество выделяется в n-мерном пространстве E_n следующей системой соотношений:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_k} \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — произвольная система индексов, принимающих значения $1, 2, \ldots, n$, и $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ — параметры сигнатуры α. Иначе говоря, если $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ — перестановка чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *то* $y_1 + y_2 + \ldots + y_k \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ *со знаком равенства* при $k = n$.

§ 75. Вторая формула Вейля

Вернемся к общей формуле для примитивных характеров $U(n)$. Введем систему вспомогательных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и заметим, что имеет место следующее тождество:

$$\det \left\| \frac{1}{1 - \gamma_i z_k} \right\| = \sum_{\alpha} X_\alpha(\gamma) X_\alpha(z),$$

которое получается разложением слева каждого матричного элемента в геометрическую прогрессию. Здесь X_α задается тем же детерминантом, что и в условиях теоремы 1, и суммирование ведется по всем сигнатурам $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, для которых числа m_i неотрицательны. С другой стороны, в теории матриц известно следующее тождество Коши *):

$$\det \left\| \frac{1}{1 - \gamma_i z_k} \right\| = \frac{\Delta(\gamma)\,\Delta(z)}{\prod\limits_{i,\,k} (1 - \gamma_i z_k)}.$$

Здесь, как и в условиях теоремы 1, Δ есть определитель Вандермонда и произведение в знаменателе берется по всем значениям $i, k = 1, 2, \ldots, n$. Сравнивая оба тождества и вспоминая, что $\chi_\alpha = X_\alpha/\Delta$, получаем следующую формулу для характеров:

$$\sum_{\alpha} \chi_\alpha(\gamma)\,\chi_\alpha(z) = \frac{1}{\prod\limits_{i,\,k} (1 - \gamma_i z_k)}.$$

---

*) См., например, [10], стр. 276.