§ 76. Заключительные замечания

В заключение остановимся несколько подробнее на общей теории характеров конечномерных представлений. Мы видели в § 73, что примитивный характер группы $U(n)$ определяет неприводимое представление однозначно с точностью до эквивалентности. Покажем теперь, что это свойство не связано со спецификой группы $U(n)$, а является универсальным.

Теорема 3. *Пусть G — произвольная группа и $\chi(g)$ — ее примитивный характер. Тогда существует лишь одно (с точностью до эквивалентности) неприводимое (конечномерное) представление группы G, имеющее своим характером $\chi(g)$.*

Доказательство. Пусть A — свободная групповая алгебра группы G, т. е. совокупность всех конечных сумм вида $a = \sum a_i g_i$ с произвольными комплексными коэффициентами a_i. Всякое представление T_g группы G мы продолжаем до представления алгебры A по формуле $T_a = \sum a_i T_{g_i}$. Соответственно всякий характер $\chi(g) = \operatorname{sp} T_g$ продолжается до характера $\chi(a) = \operatorname{sp} T_a$.

Пусть A_0 — ядро представления T_a, т. е. совокупность всех элементов $a \in A$, для которых $T_a = 0$. Тогда фактор-алгебра $B = A/A_0$ изоморфна алгебре всех операторов T_a. Мы считаем, что представление T_g действует в конечномерном пространстве V. Допустим, что T_g неприводимо. Тогда алгебра B, согласно теореме Бернсайда (см. § 21), изоморфна полной матричной алгебре в пространстве V.

Далее, пусть $\chi(g)$ — характер представления T_g. Покажем, что условие принадлежности элемента $a \in A$ ядру A_0 можно выразить в терминах характера $\chi(a)$. Действительно, равенство

$$\chi(ax) = \operatorname{sp} T_a T_x = 0$$

тождественно по $x \in A$ означает в силу теоремы Бернсайда, что $\operatorname{sp} T_a C = 0$ для всякой матрицы C в пространстве E. Но это равносильно равенству $T_a = 0$, т. е. $a \in A_0$.

Допустим теперь, что два неприводимых (конечномерных) представления группы G имеют одинаковые характеры. Тогда согласно сказанному выше оба они имеют одинаковое ядро A_0. Следовательно, оба эти представления можно рассматривать как точные представления полной матричной алгебры B. Как мы видели в § 21, все такие представления эквивалентны между собой. Теорема доказана.

Таким образом, общее свойство характеров, выражаемое теоремой 3, является следствием теоремы Бернсайда.

Из последнего замечания следует также, что вместо свободной групповой алгебры A мы могли бы рассматривать и другие алгебры, связанные с группой G, например универсальную обертывающую алгебру U (см. § 22). Характер каждого конечномерного представления алгебры U определяется по-прежнему формулой $\chi(x) = \operatorname{sp} T_x$, $x \in U$. Из доказательства теоремы 3 ясно, что заключение этой теоремы остается в силе также и для алгебры U.

* * *

Понятие характера (для конечных групп) впервые было введено Фробениусом [40'] в 1896 г. Вычисление примитивных характеров группы $U(n)$ мы приводим в этой главе по оригинальным работам Г. Вейля [10], [61]. В гл. XVII мы укажем еще один метод вычисления характеров. Весовая диаграмма для $SU(3)$ («шестиугольник») была описана впервые, вероятно, Вигнером в 1937 г. См. также [52]. Метод, принятый в этой книге, был предложен автором в [21]. Свойства весовой диаграммы для $U(n)$ и других компактных групп мы будем еще рассматривать в дальнейшем (гл. XVII). По поводу дальнейших свойств производящей функции см. монографию Вейля [10] (гл. VII).