

## ГЛАВА XII.

# ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $U(n)$

Среди различных задач спектрального анализа для представлений группы  $G$  одной из основных является следующая задача. Даны два неприводимых представления  $\tau$  и  $\sigma$  группы  $G$ . Требуется разложить представление  $\tau \otimes \sigma$  на неприводимые. Эта формулировка является корректной, во всяком случае, если  $\tau \otimes \sigma$  вполне приводимо. В данной главе последнее условие всегда будет выполнено, поскольку в качестве  $G$  будет рассматриваться компактная группа  $U(n)$ .

Первым шагом в решении указанной задачи является обычно составление «списка» неприводимых представлений, входящих в  $\tau \otimes \sigma$ , т. е. перечисление соответствующих кратностей вхождения (кратность является натуральным числом либо нулем). Более сложной является задача описания инвариантных подпространств, в которых действуют неприводимые компоненты<sup>\*</sup>). Мы приводим решение этой задачи для  $U(n)$  только в простейшем случае  $n = 2$ , однако и для общего случая намечаем путь решения.

Для группы  $U(n)$  более подробная формулировка задачи приводится в начале § 77. Мы приводим в этой главе несколько методов отыскания спектральных кратностей: метод характеров (§ 77), метод  $Z$ -инвариантов (§§ 78, 79) и сочетание последнего метода с методом детерминантов Вейля (§ 80). Из этих методов лишь метод  $Z$ -инвариантов может быть использован также для отыскания неприводимых подпространств (см. § 79).

## § 77. Метод характеров

Положим  $G = U(n)$  и фиксируем два неприводимых представления этой группы с сигнатурами  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть  $m_\gamma$  — кратность, с которой встречается  $d(\gamma)$  в тензорном

<sup>\*</sup>) Матрица перехода от тензорного базиса в  $\tau \otimes \sigma$  к базису, составленному из базисов неприводимых компонент, носит название матрицы Клебша — Гордана. Хорошо известна роль этой матрицы в некоторых задачах теоретической физики. См. по этому поводу добавление III (§ 1).

произведении  $d(\alpha) \otimes d(\beta)$ . Тогда имеем спектральную формулу

$$d(\alpha) \otimes d(\beta) = \sum_{\gamma} m_{\gamma} d(\gamma)$$

( $m_{\gamma} = 0$ , если  $d(\gamma)$  не содержится в данном представлении). Требуется вычислить неотрицательную целочисленную функцию  $m_{\gamma} = m_{\gamma}(\alpha, \beta)$ . Для решения этой задачи естественно попытаться использовать метод характеров. Действительно, вычисляя характеры обеих частей спектральной формулы, мы находим

$$\chi_{\alpha}(\delta) \chi_{\beta}(\delta) = \sum_{\gamma} m_{\gamma} \chi_{\gamma}(\delta).$$

Поскольку характер есть функция классов, достаточно рассматривать только диагональные матрицы  $\delta \in U(n)$ . В результате получаем систему числовых уравнений для определения кратности  $m_{\gamma}$ .

Поскольку для характеров  $\chi_{\alpha}(\delta)$  нам известна явная формула (гл. XI), естественно попытаться найти решение этой системы в явном виде. Положим  $\delta = \exp h$  и запишем произвольный вес  $\lambda(\delta)$  в виде  $\exp(\lambda, h)$ , где  $\lambda$  —  $n$ -мерный вектор и  $(\lambda, h)$  — скалярное произведение векторов  $\lambda, h$ . Положим

$$\chi_{\alpha}(\delta) = \sum n_{\lambda} \exp(\lambda, h).$$

Здесь  $n_{\lambda}$  — весовая кратность, или весовая диаграмма в терминах гл. XI. Умножим обе части нашей системы уравнений на полином  $\Delta(\delta)$ ; тогда  $\chi_{\beta}, \chi_{\gamma}$  заменяются соответственно полиномами  $X_{\beta}, X_{\gamma}$ , определенными в § 73. Левая часть спектральной формулы принимает вид

$$\sum_{\lambda} n_{\lambda} \exp(\lambda, h) \sum_s (\det s) \exp(s(\beta + d), h).$$

Здесь  $\beta$  — сигнатура, отвечающая второму сомножителю  $d(\beta)$ , вектор  $d$  имеет координаты  $(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ ; соответственно полином  $X_{\beta}$  выражается через вектор  $l = \beta + d$ , для которого  $l_1 > l_2 > \dots > l_n$ , и  $s$  означает произвольную подстановку координат

$l_1, l_2, \dots, l_n$ \*). Поменяем местами суммирование по  $\lambda$  и  $s$ . Поскольку  $n_\lambda = n_{s\lambda}$ , мы можем при каждом фиксированном  $s$  заменить  $\exp(\lambda, h)$  на  $\exp(s\lambda, h)$ . В результате получаем

$$\sum_s (\det s) \sum_\lambda n_\lambda \exp(s(\lambda + \beta + d), h). \quad (*)$$

С другой стороны, правая часть спектральной формулы имеет вид

$$\sum_\sigma (\det \sigma) \sum_\gamma m_\gamma \exp(\sigma(\gamma + d), h). \quad (**)$$

Здесь  $\sigma$  — произвольная подстановка и  $\gamma$  — произвольный  $n$ -мерный вектор; однако функция  $m_\gamma$  отлична от нуля только в том случае, когда вектор  $\gamma$  является сигнатурой, входящей в произведение  $d(\alpha) \otimes d(\beta)$ . При этом имеем

$$(*) = (**).$$

Сравним обе части полученной формулы. Заметим вначале, что вектор  $p = \gamma + d$  удовлетворяет условию  $p_1 > p_2 > \dots > p_n$  и ни один из векторов  $s p$  не удовлетворяет этому условию. Назовем вектор  $x$  *доминантным*, если  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ . Таким образом, можем сказать, что показатель в  $(**)$  является доминантным только при  $\sigma = e$ .

С другой стороны, найдем все доминантные показатели в  $(*)$ . Вектор  $q = \lambda + \beta + d$  не обязан быть доминантным. Однако при некоторой подстановке  $s$  мы можем получить доминантный вектор  $p$ :

$$s(\lambda + \beta + d) = p. \quad (***)$$

Если  $p$  не содержится в  $(**)$ , то соответствующая экспонента в  $(*)$  содержит с суммарным коэффициентом 0, и этот случай нас интересовать не будет. С другой стороны, если  $p$  содержится в  $(**)$ , то  $p$  удовлетворяет условию «строгой» доминантности  $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ , откуда очевидно, что подстановка  $s$  в  $(***)$  определяется *единственным образом*. (Действительно,

\*) Заметим, что  $\det s = \pm 1$  в соответствии с четностью или нечетностью подстановки  $s$ .

если  $s_1, s_2$  — две такие подстановки, то  $s_1 s_2^{-1} p = p$ , откуда  $s_1 s_2^{-1} = e$  и  $s_1 = s_2$ .) Для этой единственной подстановки введем обозначение  $s_\gamma(\lambda)$ . Она определяется тем условием, что ее применение к вектору  $\lambda + \beta + d$  переводит этот вектор в доминантный вектор, равный  $\gamma + d$ .

Соберем теперь все слагаемые в (\*), которые приводят указанным выше способом к одному и тому же значению  $p$ . Тогда окончательно получаем, что

$$m_\gamma = \sum_{\lambda} n_{\lambda} \det s_{\gamma}(\lambda).$$

Действительно, экспоненты  $\exp(\lambda, h)$  при различных  $\lambda$  линейно независимы, и равенство  $(*) = (**)$  означает равенство коэффициентов при каждой экспоненте. Окончательный результат формулируется следующим образом:

**Теорема 1.** Пусть  $n_{\lambda}$  — весовая диаграмма представления  $d(\alpha)$  и  $m_{\gamma}$  — спектральная кратность представления  $d(\alpha) \otimes d(\beta)$ . Тогда имеет место формула

$$m_{\gamma} = \sum_{\lambda} n_{\lambda} \det s_{\gamma}(\lambda),$$

где подстановка  $s_{\gamma}(\lambda)$  определяется тем условием, что она переводит вектор  $\lambda + \beta + d$  в вектор  $\gamma + d$ . Здесь  $d = (n - 1, n - 2, \dots, 1, 0)$  и  $\det s = \pm 1$  в зависимости от четности или нечетности подстановки  $s$ .

Таким образом, вычисление кратности  $m_{\gamma}$  можно описать в геометрических терминах следующим образом: 1) рассматривается орбита  $O_{\gamma+d}$  точки  $\gamma + d$  относительно группы подстановок; 2) рассматривается множество  $S_{\alpha} + \beta + d$ , получаемое из спектра  $S_{\alpha}$  представления  $d(\alpha)$  путем параллельного переноса на вектор  $\beta + d$ ; 3) определяется пересечение  $P_{\gamma}$  этих двух множеств, при этом искомая кратность  $m_{\gamma}$  получается из кратности  $n_{\lambda}$  знакопеременным суммированием по конечному множеству  $P_{\gamma}$ .

**Пример.** Даны две сигнатуры:  $\alpha = (7, 2, 0)$ ,  $\beta = (9, 4, 1)$  группы  $U(3)$ . Положим  $\gamma = (14, 7, 2)$ . Требуется найти кратность вхождения  $d(\gamma)$  в  $d(\alpha) \otimes d(\beta)$ .

В нашем случае  $d = (2, 1, 0)$ ,  $\beta + d = (11, 5, 1)$ ,  $\gamma + d = (16, 8, 2)$ . Орбита  $O_{\gamma+d}$  состоит из шести точек,

получаемых из  $(16, 8, 2)$  перестановками координат. Вместо вычисления  $S_\alpha + \beta + d$  мы рассмотрим множество  $O_{\gamma+d} - \beta - d$ . Оно состоит из следующих шести точек:  $(5, 3, 1)$ ,  $(-3, 11, 1)$ ,  $(-3, -3, 15)$ ,  $(-9, 3, 15)$ ,  $(-9, 11, 7)$ ,  $(5, -3, 7)$ . С другой стороны, спектр  $S_\alpha$  приведен в § 74 (рис. 3). Из данных шести точек лишь точка  $(5, 3, 1)$  содержится в  $S_\alpha$ , причем с кратностью 2. Следовательно, искомая кратность равняется двум.

### Упражнение

Найти (достаточные) условия на сигнатуры  $\alpha$ ,  $\beta$ , при которых пересечение орбиты  $O_{\gamma+d}$  с множеством  $S_\alpha + \beta + d$  содержит лишь единственную точку  $\lambda + \beta + d = \gamma + d$ . Заметим, что в этом случае  $m_\gamma = n_\lambda$ , где  $\gamma = \lambda + \beta$ .

Сформулируем полученный результат в несколько иной форме. Определим при фиксированном  $\beta$  функцию  $\xi_\lambda$  следующим образом. Назовем вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  *вырожденным*, если хотя бы две его координаты совпадают. Назовем вектор  $x$  *четным* (*нечетным*), если он невырожден и преобразуется к доминантному виду с помощью четной (нечетной) подстановки. Положим

$$\xi_\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если вектор } \lambda + \beta + d \text{ вырожден,} \\ +1, & \text{если вектор } \lambda + \beta + d \text{ четный,} \\ -1, & \text{если вектор } \lambda + \beta + d \text{ нечетный.} \end{cases}$$

Заметим, что всякий вектор  $x$  при помощи некоторой подстановки может быть сделан доминантным; при этом, если он невырожден, то такая подстановка  $s_0$  определяется единственным образом. Следовательно, наше определение корректно и  $\xi_\lambda = \det s_0$ . Покажем, что имеет место

**Теорема 2.** *Спектральная формула тензорного произведения для группы  $U(n)$  может быть записана в виде*

$$d(\alpha) \otimes d(\beta) = \sum_{\lambda} n_{\lambda} \xi_{\lambda} d(\gamma(\lambda)).$$

Здесь  $\gamma(\lambda) = s_0(\lambda + \beta + d) - d$ , а функция  $\xi_\lambda$  и подстановка  $s_0$  определяются, как выше. При этом  $\xi_\lambda = 0, \pm 1$ .

в зависимости от вырожденности или невырожденности вектора  $\lambda + \beta + d$ .

**Доказательство.** Соберем в сумме (\*) все слагаемые с одинаковым доминантным показателем  $p = s(\lambda + \beta + d)$ . Соответствующий суммарный коэффициент есть  $\sum_{\lambda} n_{\lambda} \theta_{\lambda p}$ , где сумма берется лишь по тем значениям  $\lambda$ , для которых справедливо указанное равенство, и

$$\theta_{\lambda p} = \sum \det s,$$

где сумма берется по множеству  $N_{\lambda p}$  всех подстановок, удовлетворяющих тому же равенству с фиксированными  $\lambda, p$ . Очевидно,  $N_{\lambda p} = s_0 \cdot N_{\lambda}$ , где  $s_0$  — произвольный элемент из  $N_{\lambda p}$  и  $N_{\lambda}$  — группа всех подстановок, сохраняющих вектор  $\lambda + \beta + d$ . Соответственно

$$\theta_{\lambda p} = \det s_0 \cdot \theta_{\lambda},$$

где  $\theta_{\lambda} = \sum \det \sigma$ , и последняя сумма берется по группе  $N_{\lambda}$ . Если вектор  $\lambda + \beta + d$  невырожден, то  $N_{\lambda}$  состоит из единичного элемента и  $\theta_{\lambda} = 1$ . Если вектор  $\lambda + \beta + d$  вырожден, то группа  $N_{\lambda}$  содержит хотя бы одну транспозицию  $s$  (перестановка одинаковых координат). В этом случае

$$\theta_{\lambda} = \sum_{\sigma \in N_{\lambda}} \det s \sigma = \det s \cdot \theta_{\lambda} = -\theta_{\lambda},$$

ибо  $\det s = -1$ . Следовательно, в этом случае  $\theta_{\lambda} = 0$ . Полагая  $p = \gamma(\lambda) + d$ ,  $\theta_{\lambda p} = \xi_{\lambda}$ , получаем нужную формулу. Теорема доказана.

### § 78. Метод $Z$ -инвариантов

Попробуем теперь применить к решению нашей задачи метод  $Z$ -инвариантов. Если каждое из представлений  $d(\alpha)$ ,  $d(\beta)$  записывать в  $Z$ -реализации, то их тензорное произведение запишется в классе полиномов от двух матриц  $x, y \in Z$ :

$$T_g f(x, y) = \alpha(x, g) \beta(y, g) f(x_g, y_g).$$