§ 79. Частные случаи

Покажем, что критерий предыдущего параграфа, несмотря на некоторую сложность формулировки, действительно дает эффективный способ решения задачи. В этом параграфе мы рассмотрим лишь простейшие частные случаи.

Пример 1. Группа SU(2). Ввиду того, что обозначения, принятые нами для группы SU(2), несколько отличаются от общих обозначений для U(n), нам будет удобно повторить все построение с самого начала. Пусть $l_1, l_2 = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ — два произвольных старших веса для SU(2). Формула

$$T_g f(x, y) = (\beta x + \delta)^{2l_1} (\beta y + \delta)^{2l_2} f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}, \frac{\alpha y + \gamma}{\beta y + \delta}\right)$$

определяет тензорное произведение $d(l_1) \otimes d(l_2)$ при условии, что $f(x, y)$ — произвольный полином степени не выше $2l_1$ по x и не выше $2l_2$ по y. Здесь x, y — произвольные комплексные числа и α, β, γ, δ — параметры матрицы $g \in \mathrm{SU}(2)$ (см. § 37). Уравнение для Z-инвариантов имеет вид

$$f(x + z, y + z) = f(x, y).$$

Очевидно, общее решение такого уравнения есть произвольный полином от $x - y$. Действительно, вводя обозначение $\varphi(z) = f(z, 0)$, находим $f(x, y) = \varphi(x - y)$. Среди таких векторов весовыми являются только степени

$$\omega_k = (x - y)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, k_0.$$

Из условия принадлежности к пространству представления вытекает, что $k_0 = \min(2l_1, 2l_2)$. Остается вычислить сигнатуру, отвечающую вектору ω_k. Если g — диагональная матрица, у которой $\gamma = \beta = 0$, $\delta = \alpha^{-1} = \lambda$, то из формулы представления вытекает, что вектор ω_k имеет вес $\lambda^{2(l_1 + l_2 - k)}$. Следовательно, искомый спектр содержит только старшие веса $l = l_1 + l_2 - k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, k_0$. Минимальным весом является $l_0 = |l_1 - l_2|$. Окончательно

$$d(l_1) \otimes d(l_2) = \sum_{|l_1 - l_2|}^{l_1 + l_2} d(l).$$

Мы получили для группы $SU(2)$ хорошо известную формулу. При этом, поскольку каждый старший вектор данного веса определяется однозначно (с точностью до множителя), каждое неприводимое представление $d(l)$ содержится в спектре однократно.

Замечание 1. Следуя этому методу, мы не только находим спектральную формулу, но легко получаем и всю остальную информацию о структуре базиса в пространстве представления (см. [84]), в том числе и коэффициенты Клебша — Гордана.

Пример 2. Положим $d(\alpha) = \boldsymbol{d}_1$ (векторное представление группы $U(n)$), и пусть $d(\beta)$ — произвольное неприводимое представление $U(n)$. Представление $\boldsymbol{d}_1$ реализуется в классе линейных форм от вектора-строки

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Действие диагональной группы: $x_i \to x_i\delta_i$, где δ_i — i-е собственное значение диагональной матрицы $\delta \in U(n)$. Следовательно, каждая координатная форма x_i является весовым мультипликатором с весом δ_i. Соответствующий инфинитезимальный вес есть $\varepsilon_i = (0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ с единицей на i-м месте. Следовательно, $\boldsymbol{d}_1 \otimes d(\beta)$ может содержать только сигнатуры

$$\gamma = \beta + \varepsilon_k, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Пространство $V_\lambda(\alpha)$ всегда одномерно, если $\lambda = \varepsilon_k$. Однако подпространство $V_\lambda(\alpha, \beta)$ может быть нульмерно. Действительно, пусть $\beta = [s_1, s_2, \ldots, s_n]$. Напомним (§ 68), что оператор E_{ij} имеет вид $x_i \dfrac{\partial}{\partial x_j}$. В частности, оператор $\mathscr{D}_i = E_{i,\,i+1}$ есть $x_i \dfrac{\partial}{\partial x_{i+1}}$. Если $s_k \neq 0$, то оператор $\mathscr{D}_k^{s_k+1}$ аннулирует все линейные формы $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Однако если $s_k = 0$, то форма x_{k+1} не аннулируется. Следовательно, $V_\lambda(\alpha, \beta) = 0$, если $\lambda = \varepsilon_{k+1}$ и $s_k = 0$.

Полученный результат станет гораздо яснее, если мы запишем сигнатуру β с помощью круглых скобок: $\beta = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$. При этом $s_k = m_k - m_{k+1}$. Равенство $s_k = 0$ означает, что $m_k = m_{k+1}$. Прибавление к сигнатуре β вектора $\varepsilon_{k+1} = (0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ с еди-

ницей на $(k+1)$-м месте нарушает в этом случае свойство доминантности ($(k+1)$-я координата становится больше k-й). Естественно, что такие слагаемые в спектральной сумме должны отсутствовать. Окончательно получаем следующий результат:

$$\boldsymbol{d}_1 \otimes d(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \\ = d(m_1+1, m_2, \ldots, m_n) + d(m_1, m_2+1, \ldots, m_n) + \ldots \\ \ldots + d(m_1, m_2, \ldots, m_n+1),$$

причем в правой части необходимо вычеркнуть те слагаемые, для которых нарушается условие доминантности ($m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$). Если в исходной сигнатуре все разности $m_k - m_{k+1}$ были отличны от нуля, то ни одно из слагаемых не вычеркивается.

Замечание 2. Полученный результат позволяет легко получить формулу для кратностей в тензорном произведении $\pi_m = \boldsymbol{d}_1 \otimes \boldsymbol{d}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{d}_1$ (m сомножителей), которое изучалось в гл. VIII. Действительно, мы имеем

$$\pi_m = \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_n=m} k(m_1, m_2, \ldots, m_n)\, d(m_1, m_2, \ldots, m_n),$$

где $k(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ — искомая кратность. Заметим, что $\pi_m = \boldsymbol{d}_1 \otimes \pi_{m-1}$. Разлагая представление π_{m-1} на неприводимые, мы умножаем каждое из них на $\boldsymbol{d}_1$, пользуясь полученным выше правилом. В результате находим рекуррентную формулу:

$$k(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \\ = k(m_1-1, m_2, \ldots, m_n) + k(m_1, m_2-1, \ldots, m_n) + \ldots \\ \ldots + k(m_1, m_2, \ldots, m_n-1).$$

Действительно, представление $d(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ может содержаться в π_m лишь за счет того обстоятельства, что в $\boldsymbol{d}_{m-1}$ встречались представления $d(m_1-1, m_2, \ldots, m_n)$, $\ldots$, $d(m_1, m_2, \ldots, m_n-1)$ с соответствующими кратностями.

Пример 3. Положим $d(\alpha) = \boldsymbol{d}_p$ (поливектор ранга p, $1 \leqslant p \leqslant n$), и пусть $d(\beta)$ — произвольное неприводимое представление группы $\mathrm{U}(n)$. Пространство пред-

ставления d_p мы можем считать натянутым на миноры

$$x_{i_1 i_2 \dots i_p} = \begin{vmatrix} x_{1i_1} & x_{1i_2} & \dots & x_{1i_p} \\ x_{2i_1} & x_{2i_2} & \dots & x_{2i_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{pi_1} & x_{pi_2} & \dots & x_{pi_p} \end{vmatrix}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_p,$$

где $x_1 = (x_{1k})$, $x_2 = (x_{2k})$, ..., $x_p = (x_{pk})$ — независимые векторные аргументы. Каждый такой минор является весовым вектором с весом $\delta_{i_1}\delta_{i_2} \dots \delta_{i_p}$. Соответствующий инфинитезимальный вес есть $\lambda_{i_1 i_2 \dots i_p} = \varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{i_2} + \dots + \varepsilon_{i_p}$. В силу условия упорядоченности $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ все такие веса различны. Отсюда получаем возможные значения спектра:

$$\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p} = \lambda_{i_1 i_2 \dots i_p} + \beta.$$

Поскольку все веса $\lambda = \lambda_{i_1 i_2 \dots i_p}$ различны, соответствующие подпространства $V_\lambda(\alpha)$ одномерны. Выясним, когда $V_\lambda(\alpha, \beta)$ нульмерно. Операторы $\mathscr{D}_i$, входящие в индикаторную систему, в данном случае имеют вид

$$\mathscr{D}_i = x^i \frac{\partial}{\partial x^{i+1}},$$

где x^i означает i-й столбец прямоугольной матрицы x, составленной из строк $x_1, x_2, \dots, x_p$. Минор $x_{i_1 i_2 \dots i_p}$ не аннулируется оператором $\mathscr{D}_k^{s_k+1}$ только в том случае, когда $s_k = 0$, индекс $k+1$ содержится среди индексов $i_1, i_2, \dots, i_p$, а индекс k среди этих индексов не содержится.

Как и в предыдущем примере, перейдем к обозначению с помощью круглых скобок: $\beta = (m_1, m_2, \dots, m_n)$. Равенство $s_k = 0$ означает, что $m_k = m_{k+1}$. Добавление вектора $\lambda_{i_1 i_2 \dots i_p} = \varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{i_2} + \dots + \varepsilon_{i_p}$ в этом случае невозможно (нарушает условие доминантности), если среди индексов $i_1, i_2, \dots, i_p$ содержится индекс $k+1$

и отсутствует индекс k. В результате

$$\boldsymbol{d}_p \otimes d(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} d(m_1, \ldots, m_{i_1}+1, \ldots, m_{i_p}+1, \ldots, m_n),$$

причем в правой части следует вычеркнуть все слагаемые, не имеющие смысла (т. е. такие, для которых вектор в круглых скобках не удовлетворяет условию доминантности).

Замечание 3. Может показаться, что для получения спектра $d(\alpha) \otimes d(\beta)$ достаточно умножить характер $\chi_\alpha(\delta)$ на старший вес $\beta(\delta)$ и в полученной сумме вычеркнуть все слагаемые, для которых нарушается условие доминантности. Следующий пример покажет, что в действительности это не так.

Пример 4. Пусть $d(\alpha) = \boldsymbol{d}_1^m$ (симметрическая степень векторного представления $\boldsymbol{d}_1$), и пусть $d(\beta)$ — произвольное неприводимое представление $U(n)$. Пространство представления $\boldsymbol{d}_1^m$ натянуто на базисные одночлены

$$f_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} = x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\ldots x_n^{\nu_n}, \qquad \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n = m.$$

Каждому такому одночлену отвечает инфинитезимальный вес $\lambda = \nu_1\varepsilon_1 + \nu_2\varepsilon_2 + \ldots + \nu_n\varepsilon_n$. Поскольку все такие веса различны, то соответствующие подпространства $V_\lambda(\alpha)$ одномерны. Операторы $\mathscr{D}_i$, входящие в индикаторную систему, имеют тот же вид, что и в примере 2. Условие

$$\mathscr{D}_k^{s_k+1} f_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \neq 0$$

возможно только в том случае, когда $s_k < \nu_{k+1}$. В результате получаем следующую спектральную формулу:

$$\boldsymbol{d}_1^m \otimes d(\beta) = \sum_{\substack{0\leqslant\nu_{k+1}\leqslant s_k \\ \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=m}} d(m_1+\nu_1, m_2+\nu_2, \ldots, m_n+\nu_n).$$

Здесь положено $\beta = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, $s_k = m_k - m_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Замечание 4. В последней формуле индексы ν_1, ν_2, $\ldots$, ν_n оказываются недопустимыми, если *хотя бы*

один из векторов $\alpha_k = (m_1, m_2, \ldots, m_k + \nu_k, \ldots, m_n)$ не является сигнатурой.

Пример 5. Найдем произведение двух поливекторов $\boldsymbol{d}_p$, $\boldsymbol{d}_q$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. Заметим, что эта задача является частным случаем задачи, рассмотренной в примере 3. Правило умножения, сформулированное в этом примере, перефразируем следующим образом. Пусть ξ_p — характер представления $\boldsymbol{d}_p$:

$$\xi_p = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \delta_{i_1}\delta_{i_2} \ldots \delta_{i_p}.$$

Умножим эту функцию на старший вес представления $\boldsymbol{d}_q$, равный $\delta_1\delta_2 \ldots \delta_q$. Показатели каждого из полученных одночленов удовлетворяют условию доминантности только в том случае, когда первые $p - k$ индексов среди $i_1, i_2, \ldots, i_p$ принимают значения $1, 2, \ldots, p-k$ $(k \leqslant p \leqslant q)$, а остальные принимают значения $q+1$, $q+2, \ldots, q+k$. В результате получаем

$$\boldsymbol{d}_p \otimes \boldsymbol{d}_q = \sum_{k \geqslant 0} \boldsymbol{d}_{p-k}\boldsymbol{d}_{q+k} \qquad (p \leqslant q).$$

При этом следует отбросить те слагаемые, для которых $p - k < 0$ или $q + k > n$. Индуктивно применяя эту формулу, получаем также следующее простое тождество:

$$\boldsymbol{d}_p\boldsymbol{d}_q = \begin{vmatrix} \boldsymbol{d}_p & \boldsymbol{d}_{p-1} \\ \boldsymbol{d}_{q+1} & \boldsymbol{d}_q \end{vmatrix}^{\otimes}, \qquad p \leqslant q,$$

для произведения Юнга двух базисных представлений $\boldsymbol{d}_p$, $\boldsymbol{d}_q$ *).

§ 80. Детерминанты Вейля

Все примеры, рассмотренные в предыдущем параграфе, относятся к случаю однократного спектра. Перейдем

*) Отсюда естественно напрашивается обобщение этого тождества на случай произведения Юнга произвольного числа базисных представлений $\boldsymbol{d}_{i_1}, \boldsymbol{d}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{d}_{i_m}$. Соответственно мы получили бы явное выражение характера χ_α произвольного представления $d(\alpha)$ через элементарные симметрические функции ξ_p — характеры базисных представлений $\boldsymbol{d}_p$, $p = 1, 2, \ldots, n$.