*один* из векторов $\alpha_k = (m_1, m_2, \ldots, m_k + \nu_k, \ldots, m_n)$ не является сигнатурой.

Пример 5. Найдем произведение двух поливекторов $\boldsymbol{d}_p$, $\boldsymbol{d}_q$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. Заметим, что эта задача является частным случаем задачи, рассмотренной в примере 3. Правило умножения, сформулированное в этом примере, перефразируем следующим образом. Пусть $\xi_p$ — характер представления $\boldsymbol{d}_p$:

$$\xi_p = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \delta_{i_1}\delta_{i_2} \ldots \delta_{i_p}.$$

Умножим эту функцию на старший вес представления $\boldsymbol{d}_q$, равный $\delta_1\delta_2 \ldots \delta_q$. Показатели каждого из полученных одночленов удовлетворяют условию доминантности только в том случае, когда первые $p-k$ индексов среди $i_1, i_2, \ldots, i_p$ принимают значения $1, 2, \ldots, p-k$ $(k \leqslant p \leqslant q)$, а остальные принимают значения $q+1$, $q+2, \ldots, q+k$. В результате получаем

$$\boldsymbol{d}_p \otimes \boldsymbol{d}_q = \sum_{k \geqslant 0} \boldsymbol{d}_{p-k}\boldsymbol{d}_{q+k} \qquad (p \leqslant q).$$

При этом следует отбросить те слагаемые, для которых $p-k<0$ или $q+k>n$. Индуктивно применяя эту формулу, получаем также следующее простое тождество:

$$\boldsymbol{d}_p\boldsymbol{d}_q = \begin{vmatrix} \boldsymbol{d}_p & \boldsymbol{d}_{p-1} \\ \boldsymbol{d}_{q+1} & \boldsymbol{d}_q \end{vmatrix}^{\otimes}, \qquad p \leqslant q,$$

для произведения Юнга двух базисных представлений $\boldsymbol{d}_p$, $\boldsymbol{d}_q$ *).

## § 80. Детерминанты Вейля

Все примеры, рассмотренные в предыдущем параграфе, относятся к случаю однократного спектра. Перейдем

*) Отсюда естественно напрашивается обобщение этого тождества на случай произведения Юнга произвольного числа базисных представлений $\boldsymbol{d}_{i_1}, \boldsymbol{d}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{d}_{i_m}$. Соответственно мы получили бы явное выражение характера $\chi_\alpha$ произвольного представления $d(\alpha)$ через элементарные симметрические функции $\xi_p$ — характеры базисных представлений $\boldsymbol{d}_p$, $p = 1, 2, \ldots, n$.

к рассмотрению общего случая. Мы предложим простой символический метод, основанный на второй формуле Вейля.

Для каждого $m = 0, 1, 2, \ldots$ мы введем «мультипликатор» $\Gamma_m$, определяемый формально следующим образом:

$$\Gamma_m d(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{\substack{0 \leqslant \nu_{k+1} \leqslant s_k \\ \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=m}} d(f_1+\nu_1, f_2+\nu_2, \ldots, f_n+\nu_n),$$

где положено $s_k = f_k - f_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Как мы видели в § 79, получаемая формула дает разложение тензорного произведения $\boldsymbol{d}_1^m \otimes d(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Далее, пусть сигнатура $\alpha$ имеет вид $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Поставим в соответствие этой сигнатуре следующий мультипликатор *):

$$\Gamma_\alpha = \begin{vmatrix} \Gamma_{m_1} & \Gamma_{m_1+1} & \ldots & \Gamma_{m_1+(n-1)} \\ \Gamma_{m_2-1} & \Gamma_{m_2} & \ldots & \Gamma_{m_2+(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Gamma_{m_n-(n-1)} & \Gamma_{m_n-(n-2)} & \ldots & \Gamma_{m_n} \end{vmatrix}.$$

Здесь элементы $\Gamma_m$ рассматриваются как взаимно перестановочные операторы и детерминант раскрывается по обычному способу. Роль мультипликаторов $\Gamma_\alpha$ объясняется следующей теоремой:

Теорема 5. *Для вычисления спектра представления $d(\alpha) \otimes d(\beta)$ достаточно применить мультипликатор $\Gamma_\alpha$ к символу $d(\beta)$. При этом мы имеем*

$$\Gamma_\alpha d(\beta) = \sum m_\gamma d(\gamma),$$

*где $m_\gamma$ — спектральная кратность $d(\alpha) \otimes d(\beta)$. Иначе говоря, выражение $\Gamma_\alpha d(\beta)$ совпадает с правой частью спектральной формулы для $d(\alpha) \otimes d(\beta)$.*

Доказательство. Достаточно напомнить (см. конец § 75), что для представления $d(\alpha)$ имеет место

*) При этом мы считаем, что $\Gamma_0 = 1$, $\Gamma_m = 0$ при $m < 0$.

формула

$$d(\alpha)=\sum \pm\, d_1^{k_1}\otimes d_1^{k_2}\otimes \ldots \otimes d_1^{k_n},$$

где показатели $k_1, k_2, \ldots, k_n$ распределяются в соответствии со второй формулой Вейля. Умножение $d(\alpha)\otimes d(\beta)$ сводится, таким образом, к последовательному умножению на $d_1^{k_1}, d_2^{k_2}, \ldots, d_n^{k_n}$. При этом порядок сомножителей не имеет значения, поскольку тензорное умножение двух представлений коммутативно.

Теорема доказана.

Пример. Положим $\alpha=(3,2,0)$, $\beta=(9,8,7)$. Мультипликатор $\Gamma_\alpha$ имеет вид

$$\Gamma_\alpha=\begin{vmatrix}\Gamma_3 & \Gamma_4 & \Gamma_5\\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\Gamma_3 & \Gamma_4\\ \Gamma_1 & \Gamma_2\end{vmatrix}=\Gamma_3\Gamma_2-\Gamma_4\Gamma_1.$$

Теперь построение спектральной формулы сводится к следующей цепочке вычислений:

1) $\Gamma_2(9,8,7)=(11,8,7)+(10,9,7)+(10,8,8)+(9,9,8)$.

$$\text{I.}\quad\begin{cases}\Gamma_3(11,8,7)=(14,8,7)+(13,9,7)+(13,8,8)+\\ \qquad+(12,10,7)+(12,9,8)+(11,11,7)+(11,10,8);\\ \Gamma_3(10,9,7)=(13,9,7)+(12,10,7)+(12,9,8)+\\ \qquad+(11,10,8)+(11,9,9)+(10,10,9);\\ \Gamma_3(10,8,8)=(13,8,8)+(12,9,8)+(11,10,8);\\ \Gamma_3(9,9,8)=(12,9,8)+(11,9,9).\end{cases}$$

2) $\Gamma_1(9,8,7)=(10,8,7)+(9,9,7)+(9,8,8)$.

$$\text{II.}\quad\begin{cases}\Gamma_4(10,8,7)=(14,8,7)+(13,9,7)+(13,8,8)+\\ \qquad+(12,9,8)+(12,10,7)+(11,10,8);\\ \Gamma_4(9,9,7)=(13,9,7)+(12,9,8)+(11,9,9);\\ \Gamma_4(9,8,8)=(13,8,8)+(12,9,8).\end{cases}$$

Здесь мы опускаем символ $d$ и действуем мультипликаторами $\Gamma_m$ непосредственно на сигнатуру $\alpha$. Сум-

мируя правые части I, мы вычеркиваем все слагаемые, входящие в правые части II. В результате получаем

$$(3, 2, 0) \otimes (9, 8, 7) = (12, 10, 7) + (12, 9, 8) + (11, 11, 7) + \\ + 2(11, 10, 8) + (11, 9, 9) + (10, 10, 9).$$

Заметим, что правило, даваемое теоремой 5, можно выразить также следующим образом. Положим

$$\Gamma_m = \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=m} \delta_1^{\nu_1}\delta_2^{\nu_2} \ldots \delta_n^{\nu_n},$$

где символ $\delta_k$ рассматривается как *оператор умножения на* $\delta_k$, *заменяемый нулем в том случае, когда он нарушает условие доминантности*. Условимся также, что $\Gamma_\alpha$ выражается через $\Gamma_m$ указанной выше формулой. Тогда, как нетрудно проверить, имеем

$$\Gamma_\alpha \beta(\delta) = \sum m_\gamma \gamma(\delta).$$

Действительно, достаточно проверить эту формулу при $d(\alpha) = \boldsymbol{d}_1^m$; для этого в свою очередь достаточно воспользоваться примером 4 из § 79. При этом мультипликаторы $\delta_k$ согласно их определению *некоммутативны*; однако операторы $\Gamma_m$ оказываются коммутативными.

Если $\mathfrak{D}$ — ассоциативная алгебра, порождаемая мультипликаторами $\delta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то $\Gamma_\alpha$ можно рассматривать как «упорядоченный характер» $\chi_\alpha$, определенным образом вложенный в эту алгебру. В этом виде удобно сравнить первоначальный метод характеров (§ 77) с полученным методом детерминантов Вейля. Если в первом случае нам приходилось перемножать два характера $\chi_\alpha$ и $\chi_\beta$, то теперь ввиду условия «упорядоченности» достаточно умножить характер $\chi_\alpha$ на старший вес $\beta(\delta)$.

В заключение напомним, что метод $Z$-инвариантов позволил также найти все старшие векторы представления $d(\alpha) \otimes d(\beta)$. Знание понижающих операторов (§ 68) позволяет получить из этих векторов все остальные базисные векторы в компонентах $d(\gamma)$. Поэтому

можно надеяться, что на этом пути удастся получить общие формулы для коэффициентов Клебша — Гордана.

* * *

Метод характеров принадлежит Р. Брауэру и Г. Вейлю [10]. Формулировка результата с помощью функции $\xi_\lambda$ (теорема 2) была предложена А. У. Климыком [104]. Метод $Z$-инвариантов применялся автором [84]; в этой же статье было предложено правило детерминантов (теорема 5). Первый метод обладает тем преимуществом, что он легко переносится на произвольные компактные группы Ли. Второй метод может быть перенесен на классические группы $O(n)$, $Sp(n)$. При этом практически он, по-видимому, более удобен. См. также [2], [33], где рассматриваются модификации метода характеров. См. [18], [34], [84] по поводу вычисления коэффициентов Клебша — Гордана для $SU(2)$.