ров $x \in X$ относительно внутренних автоморфизмов $g_0 g g_0^{-1}$. Следовательно, *всякое внутреннее дифференцирование есть главная линейная часть внутреннего автоморфизма в группе G.*

§ 82. Идеал и нормальный делитель

Теперь мы можем ввести одно из самых основных понятий в теории алгебр Ли (имеющее также аналог и в теории ассоциативных алгебр *)) — понятие идеала.

Идеалом в X называется всякое линейное подпространство, инвариантное относительно присоединенного представления в X.

Иначе говоря, линейное подпространство $Y \subset X$ является идеалом, если для всякого $a \in X$ и всякого $y \in Y$ мы имеем $[a, y] \in Y$. Поскольку это условие выполняется, в частности, при $a \in Y$, то всякий идеал является *подалгеброй* в алгебре X. Поэтому можно определить идеал как инвариантную подалгебру.

Аналогом этого понятия в теории групп (не обязательно групп Ли) является понятие нормального делителя. Подгруппа $H \subset G$ называется *нормальным делителем*, если она инвариантна относительно внутренних автоморфизмов. Иначе говоря, если $h \in H$ и $g \in G$, то $ghg^{-1} \in H$.

Если G — группа Ли и H — ее нормальный делитель, то алгебра Ли подгруппы H является, очевидно, идеалом в алгебре Ли группы G. Обратное также верно: всякому идеалу в алгебре Ли отвечает аналитическая подгруппа в группе G, которая является нормальным делителем в G. Однако такое соответствие взаимно однозначно лишь для связных подгрупп в группе G. В общем случае число нормальных делителей в группе G «превышает» число идеалов в алгебре X, поскольку связные нормальные делители могут быть иногда расширены до несвязных. В частности, группа G может содержать дискретные нормальные делители, для которых алгебра Ли состоит из единственного элемента 0.

---

*) См. стр. 102.

Пример 1. Пусть X — трехмерная алгебра Ли, состоящая из матриц

$$x = \begin{Vmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где a, b, c — действительные (или комплексные) числа. Показать, что подалгебра Y, выделяемая условием $a=0$, является идеалом в алгебре X.

Пример 2. Показать, что алгебра $X = \mathrm{su}(2)$ не содержит ни одного идеала, кроме (0) и всей алгебры X. Однако группа $\mathrm{SU}(2)$ содержит дискретный нормальный делитель, состоящий из матриц

$$e = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad -e = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Если Y — идеал, то линейное фактор-пространство X/Y наделяется структурой алгебры Ли. Действительно, если $k(x)$ — класс эквивалентности $(\mathrm{mod}\, Y)$, то мы полагаем по определению

$$[k(x_1),\ k(x_2)] = k([x_1,\ x_2]).$$

Если Y — идеал, то легко проверить, что это определение корректно, т. е. коммутатор $[z_1,\ z_2]$ содержится в единственном классе, если z_1 пробегает $k(x_1)$ и z_2 пробегает $k(x_2)$.

Точно так же, если H — нормальный делитель в группе G (не обязательно группе Ли), то фактор-пространство G/H наделяется структурой группы. В этих случаях X/Y и G/H называются соответственно *фактор-алгеброй* и *фактор-группой*.

Предлагается в качестве упражнения найти фактор-алгебру и фактор-группу в примерах 1 и 2.

Одним из наиболее важных частных случаев идеала является центр алгебры X. *Центром* Z называется множество всех элементов $z \in X$, каждый из которых перестановочен со всеми элементами из X.

Точно так же множество C называется *центром группы* G, если оно состоит из всех элементов $c \in G$, каждый из которых перестановочен со всеми элементами из G.

Если G — группа Ли и C — ее центр, то алгебра Ли подгруппы C совпадает с центром $Z \subset X$ (где X — алгебра Ли группы G). Однако по алгебре Z непосредственно восстанавливается лишь связная компонента единицы $C_e \subset C$, в то время как весь центр может быть значительно шире. В частности, может случиться, что $Z = (0)$, в то время как C — дискретная подгруппа в группе G.

Пример 3. Группа $G = \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$. Элементами центра могут быть только матрицы λe, кратные единице. Условие $\det \lambda e = 1$ означает, что $\lambda^n = 1$, т. е. λ является произвольным корнем n-й степени из 1. Следовательно, центром является циклическая группа порядка n.

С точки зрения присоединенного представления алгебра Z есть максимальное подпространство в X, на котором все операторы $\hat{a}$, $a \in X$, обращаются в нуль. Следовательно, Z является идеалом в X.

Предлагается в качестве упражнения найти центр в алгебре $z(3)$, т. е. в алгебре X из примера 1.

§ 83. Основные типы алгебр Ли

Рассмотрение присоединенного представления естественно приводит к основной классификации групп и алгебр Ли. Мы начнем с рассмотрения алгебр Ли.

Определение 1. Алгебра X называется *редуктивной*, если ее присоединенное представление вполне приводимо.

Если алгебра X редуктивна, то $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$ (прямая сумма), где X_k — неприводимые подпространства относительно присоединенного представления. Условие инвариантности X_k может быть выражено следующим образом:

$$[X, X_k] \subset X_k,$$

где символ $[A, B]$ означает линейную оболочку всех коммутаторов вида $[a, b]$, a, $b \in A$. Но это означает, что X_k — идеал. Следовательно, все подпространства X_k являются идеалами в алгебре X.

Условие редуктивности значительно упрощает изучение алгебры X. Действительно, заметим, что $[X_k, X_l]$