Если G — группа Ли и C — ее центр, то алгебра Ли подгруппы C совпадает с центром $Z \subset X$ (где X — алгебра Ли группы G). Однако по алгебре Z непосредственно восстанавливается лишь связная компонента единицы $C_e \subset C$, в то время как весь центр может быть значительно шире. В частности, может случиться, что $Z = (0)$, в то время как C — дискретная подгруппа в группе G.

Пример 3. Группа $G = \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$. Элементами центра могут быть только матрицы λe, кратные единице. Условие $\det \lambda e = 1$ означает, что $\lambda^n = 1$, т. е. λ является произвольным корнем n-й степени из 1. Следовательно, центром является циклическая группа порядка n.

С точки зрения присоединенного представления алгебра Z есть максимальное подпространство в X, на котором все операторы $\hat{a}$, $a \in X$, обращаются в нуль. Следовательно, Z является идеалом в X.

Предлагается в качестве упражнения найти центр в алгебре $z(3)$, т. е. в алгебре X из примера 1.

§ 83. Основные типы алгебр Ли

Рассмотрение присоединенного представления естественно приводит к основной классификации групп и алгебр Ли. Мы начнем с рассмотрения алгебр Ли.

Определение 1. Алгебра X называется *редуктивной*, если ее присоединенное представление вполне приводимо.

Если алгебра X редуктивна, то $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$ (прямая сумма), где X_k — неприводимые подпространства относительно присоединенного представления. Условие инвариантности X_k может быть выражено следующим образом:

$$[X, X_k] \subset X_k,$$

где символ $[A, B]$ означает линейную оболочку всех коммутаторов вида $[a, b]$, a, $b \in A$. Но это означает, что X_k — идеал. Следовательно, все подпространства X_k являются идеалами в алгебре X.

Условие редуктивности значительно упрощает изучение алгебры X. Действительно, заметим, что $[X_k, X_l]$

содержится одновременно в X_k и в X_l. Следовательно,

$$[X_k, X_l] = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l$$

и в то же время $[X_k, X_k] \subset X_k$. Отсюда заключаем, что закон коммутации в алгебре X вполне определяется структурными законами в подалгебрах X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Иначе говоря, прямое разложение

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$$

является в то же время разложением алгебры X в прямую сумму (минимальных) идеалов.

Каждый идеал X_k обладает тем свойством, что его присоединенное представление неприводимо. Следовательно, изучение алгебры X сводится к рассмотрению таких идеалов.

В дальнейшем мы увидим, что целесообразно специально выделить тот случай, когда подалгебра X_k коммутативна. Поскольку X_k — идеал, то мы имеем также $[X, X_k] = [X_k, X_k] = (0)$. Но это означает, что X_k содержится в центре алгебры X. (*Следовательно, в редуктивной алгебре всякий коммутативный идеал является центральным.*) Из минимальности X_k получаем в этом случае, что $\dim X_k = 1$. Желая исключить подобные слагаемые, приходим к следующему определению:

Определение 2. Алгебра X называется *полупростой*, если она редуктивна и центр ее равен (0).

Если алгебра X полупроста, то она не содержит ни одного коммутативного идеала (кроме (0)). В частности, алгебра X не содержит ни одного одномерного идеала. Обратно, если выполняется хотя бы одно из этих условий, то алгебра X не содержит центральных элементов (кроме 0); следовательно, алгебра X полупроста*). Если алгебра X полупроста, то все ее неприводимые идеалы удовлетворяют условию $\dim X_k > 1$.

Определение 3. Алгебра X называется *простой*, если ее присоединенное представление неприводимо и, кроме того, $\dim X > 1$.

---

*) Здесь все время предполагается, что алгебра X редуктивна.

Таким образом, коммутативные (абелевы) алгебры Ли выделяются в особый класс. Отметим очевидные связи между выделенными классами алгебр Ли:

1° *Всякая редуктивная алгебра Ли есть прямая сумма своего центра и полупростой подалгебры.*

2° *Всякая полупростая алгебра Ли есть прямая сумма простых идеалов.*

Пример 1. Алгебра $\mathrm{gl}(n, \boldsymbol{C})$ является редуктивной с одномерным центром.

Пример 2. Алгебра $\mathrm{sl}(n, \boldsymbol{C})$ является простой, если $n > 1$.

Пример 3. Алгебра $\mathrm{sl}(n_1, \boldsymbol{C}) + \mathrm{sl}(n_2, \boldsymbol{C})$ является полупростой, если $n_1 \neq 1$, $n_2 \neq 1$.

До сих пор мы рассматривали только редуктивные алгебры. В общем случае мы можем привести присоединенное представление только к квазитреугольному виду. Это означает, что алгебра X по-прежнему разлагается в прямую сумму подпространств X_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, но мы имеем

$$[X, X_k] \subset X_1 + X_2 + \ldots + X_k.$$

Все операторы D_a, $a \in X$, задаются в этом разложении квазитреугольными матрицами с диагональными блоками $n_k \times n_k$, где $n_k = \dim X_k$:

$$D_a = \begin{Vmatrix} D_a^{(1)} & & & * \\ & D_a^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_a^{(m)} \end{Vmatrix}.$$

Эти диагональные блоки $D_a^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, мы называем *компонентами* присоединенного представления. Разложение

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$$

называется *максимальным*, если все диагональные блоки $D_a^{(k)}$ являются неприводимыми представлениями алгебры X. Очевидно, максимальное разложение всегда возможно. Компоненты $D_a^{(k)}$ мы называем в этом случае

неприводимыми компонентами присоединенного представления.

Заметим, что пространства $Y_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ являются идеалами. Максимальность разложения алгебры X означает, что фактор-пространство Y_k/Y_{k-1} неприводимо при каждом $k = 1, 2, \ldots, m$, где положено $Y_0 = (0)$, $Y_m = X$. Подпространства X_k, вообще говоря, не являются идеалами. Если это так для всех $k = 1, 2, \ldots, m$, то алгебра X является редуктивной. С другой стороны, представляет интерес выделение следующего частного случая:

Определение 4. Алгебра X называется *разрешимой*, если все неприводимые компоненты $D_a^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, коммутативны*).

Если алгебра X рассматривается над комплексным полем, то в силу леммы Шура все неприводимые компоненты в этом случае одномерны, т. е. $\dim X_k = 1$. (В вещественном случае $\dim X_k \leqslant 2$.) Следовательно, в комплексном случае все операторы D_a одновременно приводятся к треугольной форме.

Среди разрешимых алгебр Ли специально выделяется еще один подкласс.

Определение 5. Алгебра X называется *нильпотентной*, если $D_a^{(k)} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

В этом случае все операторы D_a одновременно приводятся к треугольному виду с нулями на главной диагонали.

В последующих параграфах мы рассмотрим несколько подробнее соотношения коммутации во всех указанных типах алгебр Ли и сформулируем для этих типов иные определения, эквивалентные вышеизложенным.

Упражнения

1. Положим $p = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $q = x$, $r = 1$, где q рассматривается как оператор умножения на независимую переменную x в некотором классе функций $f(x)$. Показать, что p, q, r и их линейные комбина-

---

*) То есть операторы $D_a^{(k)}$, $a \in X$, перестановочны при каждом фиксированном k.

ции образуют нильпотентную алгебру Ли. Выписать операторы D_p, D_q, D_r в базисе p, q, r.

2. Сделать то же самое по отношению к операторам $p = \partial/\partial x$, $q_m = x^m$, $m = 1, 2, \ldots, n$, $r = 1$, с некоторым фиксированным $n \geqslant 1$.

3. Положим $p = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $h = e^x$. Показать, что операторы p, h и их линейные комбинации образуют разрешимую алгебру Ли.

4. Положим $p = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $q = 1 - x\dfrac{\partial}{\partial x}$, $r = 2x - x^2\dfrac{\partial}{\partial x}$. Показать, что операторы p, q, r и их линейные комбинации образуют простую алгебру Ли. Выписать операторы D_p, D_q, D_r в базисе p, q, r.

5. Показать, что операторы $\delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $q = x$, $r = 1$ и их линейные комбинации не образуют алгебры Ли. Каким оператором необходимо дополнить эту систему для получения алгебры Ли?

§ 84. Разрешимые алгебры Ли

Пусть X — алгебра Ли. Введем обозначение X' для множества $[X, X]$, составленного из коммутаторов $[a, b]$, $a, b \in X$, и их всевозможных линейных комбинаций. Нетрудно видеть, что X' является подалгеброй и даже идеалом в алгебре X. Алгебра X' называется *производной подалгеброй* алгебры X. По индукции вводятся также определения:

$$X'' = (X')', \quad X''' = (X'')', \ \ldots, \ X^{(k)} = (X^{(k-1)})'.$$

В этом параграфе мы примем за основу следующие два определения:

Определение 4′. Алгебра X называется *разрешимой*, если цепочка ее последовательных производных обрывается после конечного числа шагов, т. е. если $X^{(p)} = (0)$ при некотором p.

Определение 4″. Алгебра X называется *разрешимой*, если в ней существует цепочка вложенных подалгебр

$$(0) = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_{m-1} \subset A_m = X$$

таких, что A_{k-1} является идеалом в A_k и фактор-алгебра A_k/A_{k-1} коммутативна.

Докажем, что эти определения эквивалентны. Действительно, как следует из определения производной