ции образуют нильпотентную алгебру Ли. Выписать операторы D_p, D_q, D_r в базисе p, q, r.

2. Сделать то же самое по отношению к операторам $p = \partial/\partial x$, $q_m = x^m$, $m = 1, 2, \ldots, n$, $r = 1$, с некоторым фиксированным $n \geqslant 1$.

3. Положим $p = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $h = e^x$. Показать, что операторы p, h и их линейные комбинации образуют разрешимую алгебру Ли.

4. Положим $p = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $q = 1 - x\dfrac{\partial}{\partial x}$, $r = 2x - x^2\dfrac{\partial}{\partial x}$. Показать, что операторы p, q, r и их линейные комбинации образуют простую алгебру Ли. Выписать операторы D_p, D_q, D_r в базисе p, q, r.

5. Показать, что операторы $\delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $q = x$, $r = 1$ и их линейные комбинации не образуют алгебры Ли. Каким оператором необходимо дополнить эту систему для получения алгебры Ли?

§ 84. Разрешимые алгебры Ли

Пусть X — алгебра Ли. Введем обозначение X' для множества $[X, X]$, составленного из коммутаторов $[a, b]$, $a, b \in X$, и их всевозможных линейных комбинаций. Нетрудно видеть, что X' является подалгеброй и даже идеалом в алгебре X. Алгебра X' называется *производной подалгеброй* алгебры X. По индукции вводятся также определения:

$$X'' = (X')', \quad X''' = (X'')', \ \ldots, \ X^{(k)} = (X^{(k-1)})'.$$

В этом параграфе мы примем за основу следующие два определения:

Определение 4′. Алгебра X называется *разрешимой*, если цепочка ее последовательных производных обрывается после конечного числа шагов, т. е. если $X^{(p)} = (0)$ при некотором p.

Определение 4″. Алгебра X называется *разрешимой*, если в ней существует цепочка вложенных подалгебр

$$(0) = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_{m-1} \subset A_m = X$$

таких, что A_{k-1} является идеалом в A_k и фактор-алгебра A_k/A_{k-1} коммутативна.

Докажем, что эти определения эквивалентны. Действительно, как следует из определения производной

подалгебры X', фактор-алгебра X/X' коммутативна. Следовательно, цепочка

$$(0) = X^{(p)} \subset X^{(p-1)} \subset \ldots \subset X' \subset X^{(0)} = X$$

удовлетворяет условиям определения 4'', если $X^{(p)} = (0)$. С другой стороны, если выполняются условия определения 4'', то $X' \subset A_{m-1}$, $X'' \subset A'_{m-1} \subset A_{m-2}$ и т. д., откуда $X^{(p)} = (0)$ при некотором p.

Заметим также, что в силу условия коммутативности цепочку подалгебр A_k в определении 4'' можно при желании считать максимальной, т. е. такой, что $\dim A_k/A_{k-1} = 1$. Предлагается самостоятельно доказать следующие утверждения:

1. *Всякая подалгебра разрешимой алгебры Ли разрешима.*

2. *Всякая фактор-алгебра разрешимой алгебры Ли разрешима.*

3. *Если идеал Y и фактор-алгебра X/Y разрешимы, то алгебра X также разрешима.*

Принимая указанные в этом параграфе определения разрешимости, мы докажем теперь следующую фундаментальную теорему, принадлежащую Софусу Ли.

Теорема Ли. *Пусть X — разрешимая алгебра Ли. Тогда всякое неприводимое представление алгебры X коммутативно.*

Доказательство. Условимся вначале рассматривать представления только в комплексных пространствах. Если $\dim X = 1$, то алгебра X коммутативна, и утверждение теоремы вытекает из леммы Шура, причем в данном случае пространство представления одномерно. В общем случае согласно определению разрешимости мы имеем

$$X = X_0 + \{\varepsilon\},$$

где X_0 — разрешимый идеал в алгебре X и $\{\varepsilon\}$ — одномерное направление, натянутое на элемент $\varepsilon \neq 0$. Пусть $\rho(x)$ — неприводимое представление алгебры X в пространстве V и V_0 — подпространство, неприводимое относительно подалгебры X_0. Поскольку $\dim X_0 < \dim X$, то можем считать по допущению индукции, что для ал-

гебры X_0 теорема уже доказана; но тогда $\dim V_0 = 1$, и мы имеем

$$\rho(x)\xi_0 = \lambda(x)\xi_0$$

для всякого $x \in X_0$ и всякого $\xi_0 \in V_0$. (Здесь $\lambda(x)$ — линейная форма над алгеброй X_0.) Далее, рассмотрим оператор $\rho(\varepsilon)$ и положим $\xi_1 = \rho(\varepsilon)\xi_0$, $\xi_2 = \rho(\varepsilon)\xi_1 \ldots$ Пусть V_ε — линейная оболочка этих векторов; тогда подпространство V_ε инвариантно относительно $\rho(\varepsilon)$. Покажем, что V_ε инвариантно также относительно $\rho(x)$, $x \in X_0$. Действительно, имеем

$$\rho(x)\xi_k = \rho(x)\rho(\varepsilon)\xi_{k-1} = \rho(\varepsilon)\rho(x)\xi_{k-1} + \rho(z)\xi_{k-1}, \qquad (*)$$

где положено $z = [x, \varepsilon] \in X_0$. Если $k = 1$, то $\rho(x)$ и $\rho(z)$ в правой части $(*)$ мы можем заменить числовыми множителями $\lambda(x)$, $\lambda(z)$. В общем случае индукцией по k получаем следующее равенство:

$$\rho(x)\xi_k = \lambda(x)\xi_k + \ldots,$$

где многоточие означает линейную комбинацию векторов $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$. Инвариантность V_ε доказана. Но тогда мы имеем $V_\varepsilon = V$ ввиду неприводимости V. Если k_0 — максимальный из номеров, для которых векторы $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ линейно независимы, то векторы $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_0}$ образуют базис в пространстве V. Относительно этого базиса матрица $\rho(x)$, $x \in X_0$, является треугольной с одинаковыми диагональными элементами $\lambda(x)$. Следовательно,

$$\operatorname{sp}\rho(x) = m\lambda(x),$$

где $m = \dim V (= k_0 + 1)$. Если $y = [x_1, x_2]$, то $\operatorname{sp}\rho(y) = 0$ (след коммутатора равен нулю). Следовательно, в этом случае $\lambda(y) = 0$. В частности, если $x \in X_0$ и $z = [x, \varepsilon]$, то $\lambda(z) = 0$. Возвращаясь к формуле $(*)$, мы можем уточнить получаемый результат:

$$\rho(x)\xi_k = \lambda(x)\xi_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, k_0.$$

Но это означает, что оператор $\rho(x)$, $x \in X_0$, является скалярным оператором на V. Если η — собственный

вектор оператора $\rho(\varepsilon)$, то направление η инвариантно относительно всей алгебры X. Следовательно, $V = \{\eta\}$, и V одномерно.

Итак, для комплексного случая теорема доказана. В вещественном случае полагаем $\tilde{V} = V + iV$ и продолжаем $\rho(x)$ на $\tilde{V}$ по правилу $\rho(x)(\xi + i\eta) = \rho(x)\xi + i\rho(x)\eta$. Согласно доказанному выше всякое неприводимое подпространство в $\tilde{V}$ одномерно. Если вектор $\xi_0 + i\eta_0$ определяет такое одномерное направление, то линейная оболочка векторов ξ_0, η_0 в пространстве V инвариантна относительно $\rho(x)$. Следовательно, $\dim V \leqslant 2$, и представление в пространстве V коммутативно *). Теорема доказана.

Как уже отмечалось при доказательстве теоремы, привлечение леммы Шура позволяет получить дополнительные ограничения: $\dim V = 1$ в комплексном случае, $\dim V \leqslant 2$ в вещественном случае. Если ограничиться комплексными пространствами, то теорема Ли допускает одну из следующих трех эквивалентных формулировок:

1° *Всякое неприводимое представление алгебры X одномерно.*

2° *В пространстве любого представления алгебры X существует хотя бы один вектор, собственный относительно всей алгебры X.*

3° *Всякое представление алгебры X приводится в некотором базисе к треугольной форме.*

Подчеркнем, что речь идет о конечномерных представлениях. Для доказательства эквивалентности заметим, что среди логических следствий $1° \Rightarrow 2° \Rightarrow 3° \Rightarrow 1°$ требует проверки только $2° \Rightarrow 3°$. Но выполнение 2° означает приводимость $\rho(x)$ к блочному виду:

$$\rho(x) = \begin{Vmatrix} \lambda(x) & * \\ 0 & \rho'(x) \end{Vmatrix},$$

---

*) Действительно, если ξ_0, η_0 коллинеарны, то $\dim V = 1$, и наше утверждение доказано. Если же ξ_0, η_0 линейно независимы, то мы имеем $\rho(x)(\xi_0 + i\eta_0) = \lambda(x)(\xi_0 + i\eta_0)$, откуда $\rho(x)(\xi_0 - i\eta_0) = \overline{\rho(x)(\xi_0 + i\eta_0)} = \overline{\lambda(x)}(\xi_0 - i\eta_0)$, и представление $\rho(x)$ в базисе ξ_0, η_0 коммутативно.

где $\lambda(x)$ — собственное значение и $\rho'(x)$ — представление алгебры X в пространстве меньшей размерности. Применяя индукцию по размерности, получаем 3°.

Для произвольного поля (вещественного или комплексного) получаем из теоремы Ли

Следствие 1. *Если $\rho(x)$ — неприводимое представление разрешимой алгебры X, то $\rho(x)$ тривиально на производной подалгебре X': $\rho(z) = 0$ при $z \in X'$.*

С другой стороны, применяя теорему Ли к присоединенному представлению алгебры X, получаем дополнительную информацию о структуре этого представления:

Следствие 2. *Алгебра X разрешима тогда и только тогда, когда существует цепочка вложенных идеалов*

$$(0) = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_{m-1} \subset Y_m = X,$$

где Y_k — идеал во всей алгебре X и фактор-алгебра Y_k/Y_{k-1} коммутативна для всех $k = 1, 2, \ldots, m$.

Действительно, если X — комплексная алгебра, то указанная цепочка возникает при приведении D_a к треугольному виду, причем $\dim Y_k/Y_{k-1} = 1$. В вещественном случае доказательство предоставляется читателю.

Наличие цепочки идеалов, указанной в следствии 2, равносильно определению 4, данному в § 83 *). Таким образом, условия этого определения являются формально более сильными, чем условия определения 4″. Однако мы видим, что в действительности эти условия эквивалентны.

В результате получаем, что определения 4, 4′, 4″ взаимно эквивалентны. В комплексном случае определение разрешимости может быть также сформулировано следующим образом. Алгебра X называется разрешимой, если в ней существует максимальная цепочка вложенных идеалов с возрастанием размерностей на единицу.

§ 85. Нильпотентные алгебры Ли

В этом параграфе мы намерены исследовать различные определения нильпотентной алгебры Ли. Предварительно докажем следующую классическую теорему.

---

*) $Y_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ в обозначениях § 83.