

где $\lambda(x)$ — собственное значение и $\rho'(x)$ — представление алгебры X в пространстве меньшей размерности. Применяя индукцию по размерности, получаем З°.

Для произвольного поля (вещественного или комплексного) получаем из теоремы Ли

Следствие 1. *Если $\rho(x)$ — неприводимое представление разрешимой алгебры X , то $\rho(x)$ тривиально на производной подалгебре X' : $\rho(z) = 0$ при $z \in X'$.*

С другой стороны, применяя теорему Ли к присоединенному представлению алгебры X , получаем дополнительную информацию о структуре этого представления:

Следствие 2. *Алгебра X разрешима тогда и только тогда, когда существует цепочка вложенных идеалов*

$$(0) = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_{m-1} \subset Y_m = X,$$

где Y_k — идеал во всей алгебре X и фактор-алгебра Y_k/Y_{k-1} коммутативна для всех $k = 1, 2, \dots, m$.

Действительно, если X — комплексная алгебра, то указанная цепочка возникает при приведении D_a к треугольному виду, причем $\dim Y_k/Y_{k-1} = 1$. В вещественном случае доказательство предоставляется читателю.

Наличие цепочки идеалов, указанной в следствии 2, равносильно определению 4, данному в § 83*). Таким образом, условия этого определения являются формально более сильными, чем условия определения 4''. Однако мы видим, что в действительности эти условия эквивалентны.

В результате получаем, что определения 4, 4', 4'' взаимно эквивалентны. В комплексном случае определение разрешимости может быть также сформулировано следующим образом. Алгебра X называется разрешимой, если в ней существует максимальная цепочка вложенных идеалов с возрастанием размерностей на единицу.

§ 85. Нильпотентные алгебры Ли

В этом параграфе мы намерены исследовать различные определения нильпотентной алгебры Ли. Предварительно докажем следующую классическую теорему.

*) $Y_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ в обозначениях § 83.

Теорема Энгеля. Пусть X — линейная алгебра Ли *), для каждого элемента которой выполняется условие нульстепенности ($x^m = 0$). Тогда все матрицы $x \in X$ приводятся в некотором базисе к треугольной форме с нулями на главной диагонали.

Доказательство. Если $\dim X = 1$, то теорема Энгеля верна. Мы будем вести доказательство индукцией по $\dim X$, т. е. по числу линейно независимых элементов в алгебре X . Допустим, что теорема Энгеля уже доказана для всякой линейной алгебры Y такой, что $\dim Y < \dim X$, и покажем, что в этом случае имеет место

Лемма. Всякая собственная подалгебра $Y \subset X$ может быть расширена до подалгебры $Z \subset X$ такой, что Y — идеал в Z и $\dim Z/Y = 1$.

Доказательство леммы. Заметим вначале, что для линейной алгебры X оператор D_a может быть записан в виде $D_a x = ax - xa$, $x \in X$. Рассуждая индуктивно, получаем отсюда следующую формулу **):

$$D_a^p x = \sum_{i=0}^p (-1)^i C_p^i a^{p-i} x a^i,$$

где C_p^i — биномиальные коэффициенты. Если $a^m = 0$ и $p > 2m$, то либо $i > m$, либо $p - i > m$, откуда $D_a^p = 0$. Следовательно, алгебра \mathfrak{D} операторов D_a также удовлетворяет условиям теоремы Энгеля.

Пусть $y \in Y$, тогда $D_y Y \subset Y$, откуда следует, что при всяком разложении $X = Y + S$ (S — дополнительное подпространство) оператор D_y может быть записан в блочном виде:

$$D_y = \begin{vmatrix} A_y & * \\ 0 & B_y \end{vmatrix},$$

где A_y — преобразование в Y и B_y — преобразование в S . Из нульстепенности D_y следует также нульстепенность A_y и B_y .

*) Т. е. алгебра Ли, составленная из матриц $n \times n$ при некотором n .

**) Можно рассуждать и так: $D_a = L - R$, где L — оператор левого умножения на a и R — оператор правого умножения на a . Поскольку эти операторы перестановочны, то $D_a^p = \sum (-1)^i C_p^i L^{p-i} R^i$.

Заметим теперь, что размерность алгебры $\{B_y\}$ не превосходит размерности алгебры Y^*). Используя допущение индукции, мы можем считать, что теорема Энгеля верна для алгебры $\{B_y\}$. В частности, существует вектор $s_0 \in S$ такой, что $B_y s_0 = 0$. Иначе говоря, $[y, s_0] \in Y$ для всех $y \in Y$. Положим $Z = Y + \{s_0\}$. Тогда имеем

$$[Y, Z] \subset Y, \quad [Z, Z] \subset Z.$$

Следовательно, Z — подалгебра в X и Y — идеал в подалгебре Z . Лемма доказана.

Если a_1 — произвольный элемент подалгебры X , то пространство $\{a_1\} = A_1$ является одномерной подалгеброй в X . Расширяя эту подалгебру до двумерной подалгебры A_2 , затем расширяя A_2 до трехмерной подалгебры A_3 и т. д., получаем в X цепочку вложенных подалгебр

$$(0) = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{m-1} \subset A_m = X$$

таких, что A_{k-1} является идеалом в A_k . Следовательно, алгебра X разрешима. Применяя теорему Ли, заключаем, что все операторы $x \in X$ одновременно приводятся к треугольному виду. Нулюстенность x означает, что все его собственные значения равны нулю. Теорема доказана.

В нижеследующих утверждениях мы предполагаем, что алгебра X удовлетворяет условиям теоремы Энгеля. Тогда из этой теоремы получаем

Следствие 1. Алгебра X содержит нетривиальный центр.

Действительно, пусть z — такой элемент из X , который является собственным вектором с собственным значением 0 относительно всех операторов D_a , $a \in X$. Тогда $[z, a] = 0$, $a \in X$, и z содержится в центре алгебры X .

Следствие 2. Существует натуральное число p , для которого $x_1 x_2 \cdots x_p = 0$, где x_1, x_2, \dots, x_p — произвольные элементы из X .

Этот результат непосредственно следует из треугольной структуры операторов x_1, x_2, \dots, x_p (с нулями на

*) Напомним, что размерность понимается как число линейно независимых элементов.

диагонали). Указанное равенство, во всяком случае, верно, если p — размерность линейного пространства, в котором действует X .

Исходя из полученных результатов, мы естественно приходим к следующим двум определениям.

Определение 5'. Алгебра X называется *нильпотентной*, если $\hat{x}^n = 0$ для всякого $x \in X$ (при некотором натуральном n , которое можно считать не зависящим от x).

Определение 5''. Алгебра X называется *нильпотентной*, если $[x_1[x_2, \dots, [x_q, x_{q+1}] \dots]] = 0$ для всякого набора элементов $x_1, x_2, \dots, x_{q+1} \in X$ (при некотором натуральном q , которое можно считать не зависящим от x_i).

Заметим, что последнее условие можно также записывать в виде $\hat{x}_1\hat{x}_2 \dots \hat{x}_q = 0$. Применяя следствие 2 к линейной алгебре операторов $\hat{x} = D_x$, заключаем, что условия определения 5'' могут быть получены как следствие из условий определения 5'. С другой стороны, условия определения 5' представляют собой частный случай условий определения 5''. Следовательно, оба эти определения равносильны.

Далее, согласно теореме Энгеля условия определения 5 (§ 83) могут быть получены как следствие из условий определения 5'. В то же время обратное утверждение очевидно. В результате получаем, что все определения 5, 5', 5'' эквивалентны.

Определение нильпотентности может быть сформулировано также следующим образом. Пусть X — произвольная алгебра Ли. Положим

$$Z_{k+1} = [X, Z_k], \quad Z_0 = X.$$

Тогда Z_{k+1} при любом значении k является идеалом не только в Z_k , но и во всей алгебре X . Цепочка идеалов Z_k называется *центральным рядом* в алгебре X . Определение 5'' формулируется теперь следующим образом:

Алгебра X называется *нильпотентной*, если ее центральный ряд сходится к нулю, т. е. $Z_k = (0)$ при некотором k .

В заключение отметим связь между центральным рядом алгебры X' и рядом последовательных производных

алгебры X . Пусть Z'_k — центральный ряд алгебры $X' = [X, X]$. Тогда имеем

$$X' = [X, X] = Z'_0,$$

$$X'' = [X', X'] = [X', Z'_0] = Z'_1,$$

$$X''' = [X'', X'] \subset [X', X''] = [X', Z'_1] = Z'_2, \dots$$

Рассуждая индуктивно, заключаем, что $X^{(k)} \subset Z'_{k-1}$. Если, в частности, алгебра $X' = Z'_0$ нильпотентна, то $X^{(p)} = (0)$ при некотором p , т. е. алгебра X разрешима. Обратно, если X разрешима, то все неприводимые компоненты $D_a^{(k)}$ коммутативны (§ 83) и потому обращаются в нуль для $a \in X'$. Следовательно, если $a \in X'$, то D_a — нульстепенный оператор. Следовательно, алгебра X' нильпотентна. В результате получаем следующий важный результат:

Алгебра X разрешима тогда и только тогда, когда ее производная подалгебра X' нильпотентна.

Упражнения

1. Показать, что всякая нильпотентная алгебра Ли размерности 2 коммутативна.

2. Показать, что всякая нильпотентная алгебра Ли размерности 3 либо коммутативна, либо задается единственным нетривиальным соотношением коммутации $[p, q] = r$ между базисными элементами p, q, r (алгебра Ли группы $Z(3)$).

3. Пусть X — нильпотентная алгебра Ли размерности n . Показать, что всякая ее подалгебра размерности $n - 1$, содержащая центр, является идеалом в X . (Указание: рассмотреть присоединенное представление как фактор по центру и воспользоваться леммой на стр. 386.)

§ 86. Разложения Фиттинга

В этом параграфе мы изложим один из общих методов изучения законов коммутации в произвольной алгебре Ли. Этот метод допускает формулировку как в комплексном, так и в вещественном случае. Однако ради простоты мы будем рассматривать только алгебры Ли над полем комплексных чисел.

Пусть a — линейный оператор в пространстве E и E_λ — максимальное подпространство, натянутое на собственные и присоединенные векторы этого оператора с