алгебры X. Пусть Z'_k — центральный ряд алгебры $X' = [X, X]$. Тогда имеем

$$X' = [X, X] = Z'_0,$$

$$X'' = [X', X'] = [X', Z'_0] = Z'_1,$$

$$X''' = [X'', X''] \subset [X', X''] = [X', Z'_1] = Z'_2, \ldots$$

Рассуждая индуктивно, заключаем, что $X^{(k)} \subset Z'_{k-1}$. Если, в частности, алгебра $X' = Z'_0$ нильпотентна, то $X^{(p)} = (0)$ при некотором p, т. е. алгебра X разрешима. Обратно, если X разрешима, то все неприводимые компоненты $D_a^{(k)}$ коммутативны (§ 83) и потому обращаются в нуль для $a \in X'$. Следовательно, если $a \in X'$, то D_a — нульстепенный оператор. Следовательно, алгебра X' нильпотентна. В результате получаем следующий важный результат:

Алгебра X разрешима тогда и только тогда, когда ее производная подалгебра X' нильпотентна.

Упражнения

1. Показать, что всякая нильпотентная алгебра Ли размерности 2 коммутативна.

2. Показать, что всякая нильпотентная алгебра Ли размерности 3 либо коммутативна, либо задается единственным нетривиальным соотношением коммутации $[p, q] = r$ между базисными элементами p, q, r (алгебра Ли группы $Z(3)$).

3. Пусть X — нильпотентная алгебра Ли размерности n. Показать, что всякая ее подалгебра размерности $n-1$, содержащая центр, является идеалом в X. (Указание: рассмотреть присоединенное представление как фактор по центру и воспользоваться леммой на стр. 386.)

§ 86. Разложения Фиттинга

В этом параграфе мы изложим один из общих методов изучения законов коммутации в произвольной алгебре Ли. Этот метод допускает формулировку как в комплексном, так и в вещественном случае. Однако ради простоты мы будем рассматривать только алгебры Ли над полем комплексных чисел.

Пусть a — линейный оператор в пространстве E и E_λ — максимальное подпространство, натянутое на собственные и присоединенные векторы этого оператора с

собственным значением λ:

$$E_\lambda = \{\xi\colon \xi \in E,\ (a-\lambda)^n \xi = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

Тогда, как известно (из теории элементарных делителей), пространство E может быть представлено в виде прямой суммы подпространств E_λ:

$$E = \sum_\lambda E_\lambda,$$

где суммирование ведется лишь по конечному множеству чисел λ, которые являются собственными значениями оператора a. Оказывается, что этот результат переносится также на нильпотентные алгебры линейных операторов в пространстве E.

Пусть X — линейная алгебра Ли, определенная в пространстве E. Функция $\lambda = \lambda(x)$, $x \in X$, называется *собственным значением* или *весом* алгебры X, если $x\xi = \lambda(x)\xi$ для некоторого вектора $\xi \in E$, $\xi \neq 0$; очевидно, $\lambda(x)$ является линейной формой от $x \in X$. Пространство

$$E_\lambda = \{\xi\colon \xi \in E,\ (x - \lambda(x))^n \xi = 0, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ x \in X\}$$

называется *весовым пространством* алгебры X, отвечающим весу λ. Иначе говоря, E_λ есть пересечение всех собственных пространств $E_{\lambda(x)}$, определенных для отдельных операторов $x \in X$. При этом мы считаем, что $E_\lambda = (0)$, если λ не является весом алгебры X.

Докажем, что имеет место

Теорема 1. *Если X — нильпотентная алгебра Ли, то пространство E разлагается в прямую сумму*

$$E = \sum_\lambda E_\lambda,$$

где суммирование ведется лишь по конечному множеству линейных форм $\lambda = \lambda(x)$, которые являются весами алгебры X.

Доказательство. Используя индукцию по n, легко проверяем тождество

$$a^n b = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^{(k)} a^{n-k},$$

где $b^{(k)} = \hat{a}^k b$, справедливое для любых линейных операторов a, b в пространстве E (C_n^k — биномиальные коэффициенты). Если a, $b \in X$, то $b^{(k)} = 0$ при достаточно большом значении k. Заменяя a на $a - \lambda(a)$, применяем обе части этого равенства к вектору $\xi \in E_{\lambda(a)}$. Поскольку среди чисел k, $n-k$ хотя бы одно превосходит $n/2$, то при достаточно высоком n мы получаем

$$(a - \lambda(a))^n b\xi = 0.$$

Но это означает, что $E_{\lambda(a)}$ инвариантно относительно b при любых a, $b \in X$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в алгебре X. Пространство E есть прямая сумма подпространств E_{λ_1}, где λ_1 — произвольное собственное значение оператора e_1. В свою очередь E_{λ_1}, будучи инвариантно относительно e_2, есть прямая сумма подпространств $E_{\lambda_1\lambda_2} = (E_{\lambda_1})_{\lambda_2}$, весовых относительно e_2, и т. д. Следовательно,

$$E = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} E_{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n}$$

(прямая сумма), где каждое из слагаемых инвариантно относительно всей алгебры X. Поскольку алгебра X нильпотентна, то в силу теоремы Ли все матрицы x в подпространстве $E_{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n}$ одновременно приводятся к треугольной форме. Отсюда ясно, что единственным собственным значением в этом подпространстве является линейная форма $\lambda(x) = \lambda_i x^i$, и $E_{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n} = E_\lambda$. Теорема доказана.

Теперь предположим, что X — произвольная алгебра Ли и N — ее нильпотентная подалгебра. Применяя теорему 1 к линейной алгебре $\hat{N} = \{\hat{x};\ x \in N\}$, получаем разложение алгебры X в прямую сумму весовых подпространств:

$$X = \sum_\alpha X_\alpha, \qquad (*)$$

где $\alpha = \alpha(x)$ — произвольный вес, определенный на линейной алгебре N. Такие веса называются *корнями*, и пространство X_α называется *корневым подпространством* в алгебре X.

Разложение (*) называется *разложением Фиттинга* алгебры X (по отношению к нильпотентной подалгебре N). Мы исследуем в этом параграфе основные свойства такого разложения.

1° $[X_\alpha, X_\beta] \subset X_{\alpha+\beta}$.

Для доказательства этого утверждения достаточно проверить (индукцией по n) справедливость следующего тождества *):

$$(D-\alpha-\beta)^n [x, y] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[(D-\alpha)^k x, (D-\beta)^{n-k} y\right],$$

где D — произвольное дифференцирование в алгебре X. Полагая, в частности, $D = D_z$, $z \in N$, $\alpha = \alpha(z)$, $\beta = \beta(z)$, получаем в правой части нуль при достаточно высоком n, если $x \in X_\alpha$, $y \in X_\beta$.

2° $[X_0, X_\alpha] \subset X_\alpha$, $[X_0, X_0] \subset X_0$.

Эти равенства являются частным случаем 1°. Они показывают, что корневое пространство X_0, отвечающее корню 0, само является подалгеброй в алгебре X и каждое пространство X_α инвариантно относительно X_0.

3° $N \subset X_0$.

Действительно, если $z \in N$, то $\hat{z}$ имеет только нулевое собственное значение на N ввиду нильпотентности N. Следовательно, $N \subset X_0$. В частности, мы видим, что нуль всегда содержится среди корней алгебры X (это следует также из равенства $[z, z] = 0$).

Для получения более дробного разложения в алгебре X естественно N выбирать по возможности максимальной. Особенно интересен случай $N = X_0$. В этом случае разложение Фиттинга называется *регулярным*.

Выясним, когда возможно регулярное разложение. Элемент $x \in X$ назовем *регулярным*, если оператор $\hat{x}$ имеет минимально возможную кратность нулевого собственного значения в пространстве X. Очевидно, такие элементы всегда существуют. Пусть h — регулярный элемент и N — максимальная нильпотентная подалгеб-

*) При $\alpha = \beta = 0$ это тождество превращается в известное правило Лейбница для кратной производной.

ра, содержащая этот элемент. Условимся в этом случае говорить, что алгебра N является *регулярной*.

Теорема 2. *Если N — регулярная подалгебра, то разложение Фиттинга является регулярным.*

Доказательство. Рассмотрим вначале разложение Фиттинга по отношению к единственному оператору $\hat{h}$, где h — регулярный элемент:

$$X = X_0 + \tilde{X}.$$

Здесь $\tilde{X}$ — прямая сумма подпространств с ненулевыми собственными значениями. Согласно свойству 2° полученное разложение инвариантно относительно всех операторов $\hat{x}$, $x \in X_0$. Положим $x = h + \varepsilon x_0$, и пусть $\tilde{P}(\varepsilon)$ — детерминант преобразования $\hat{x}$ на подпространстве $\tilde{X}$:

$$\tilde{P}(\varepsilon) = \det_{\tilde{X}} (\hat{h} + \varepsilon \hat{x}_0).$$

Тогда $\tilde{P}(\varepsilon)$ — полином от ε и $\tilde{P}(0) \neq 0$; поэтому $\tilde{P}(\varepsilon) \neq 0$ при достаточно малых значениях ε. Следовательно, в этом случае все нулевые собственные значения оператора $\hat{x}$ содержатся в подпространстве X_0. Поскольку их число не может быть меньше размерности X_0 (согласно определению регулярного элемента), то $\hat{x}$ — нульстепенное преобразование в X_0. Пусть

$$P_0(\lambda, \varepsilon) = \det_{X_0} (\lambda - \hat{x})$$

— характеристический детерминант оператора $\hat{x}$ в подпространстве X_0. Тогда $P_0(\lambda, \varepsilon)$ является полиномом от λ и ε и $P_0(\lambda, \varepsilon) = \lambda^{n_0}$, $n_0 = \dim X_0$, для достаточно малых значений ε. Следовательно, $P_0(\lambda, \varepsilon) \equiv \lambda^{n_0}$, и это означает, что для любого $x \in X_0$ преобразование $\hat{x}$ нульстепенно в X_0. Следовательно, X_0 — нильпотентная подалгебра.

Далее, пусть N — максимальная нильпотентная подалгебра, содержащая h. Равенство $\hat{h}^m N = (0)$ (при достаточно большом m) означает, что $N \subset X_0$. Ввиду максимальности N в классе нильпотентных подалгебр мы имеем $N = X_0$. Алгебра N не может иметь нулевых корней в $\tilde{X}$ (поскольку $h \in N$); следовательно, подпространство X_0 совпадает также с нулевым подпростран-

ством в разложении Фиттинга относительно N. Теорема доказана.

Следствие. *В произвольной алгебре Ли существует регулярное разложение Фиттинга*:

$$X = N + \sum_{\alpha \neq 0} X_\alpha.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие разложения.

В заключение этого параграфа рассмотрим специальные элементы вида $z = [x_\alpha, x_{-\alpha}]$, $x_\alpha \in X_\alpha$, $x_{-\alpha} \in X_{-\alpha}$, которые, как следует из регулярности, содержатся в алгебре N. Следовательно, для z определено понятие корня $\lambda = \lambda(z)$. Подпространство $Y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{\lambda+k\alpha}$ инвариантно относительно $\hat{x}_\alpha$, $\hat{x}_{-\alpha}$, а потому и относительно $\hat{z}$. Поскольку след коммутатора равен нулю, то мы получаем соотношение

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} n_k \{\lambda(z) + k\alpha(z)\} = 0.$$

Здесь n_k — размерность корневого подпространства $X_{\lambda+k\alpha}$, отличная от нуля лишь для конечного числа значений $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и выражение слева, очевидно, равно $\mathrm{sp}_Y \hat{z}$ для треугольной матрицы $\hat{z}$. Поскольку $\sum_{k=-\infty}^{\infty} n_k \neq 0$, то это уравнение можно разрешить относительно $\lambda(z)$, откуда получаем $\lambda(z) = r\alpha(z)$, где r — рациональное число (зависящее от λ и α). Суммируя по всем корням, мы получаем также равенство

$$\mathrm{sp}\, \hat{z}^m = \rho_m \alpha(z)^m$$

с рациональным коэффициентом $\rho_m = \sum_\lambda r_\lambda^m$, где $r_\lambda = -\sum k n_k / \sum n_k$ для каждого корня λ. Если $\alpha \neq 0$, то существует хотя бы один корень λ (например, $\lambda = 0$), для которого $\lambda' = \lambda + \alpha$ также является корнем. Равенства $r_\lambda = r_{\lambda'} = 0$ приводят к противоречию, ибо $r_{\lambda'} - r_\lambda = 1$. Следовательно, $r_\lambda \not\equiv 0$, и отсюда $\rho_m \neq 0$ при четном m.