§ 87. Билинейная форма Киллинга — Картана

Пусть X — произвольная алгебра Ли, комплексная или вещественная. Для любых элементов $x, y \in X$ положим

$$(x, y) = \operatorname{sp} D_x D_y.$$

Полученная билинейная форма называется *формой Киллинга — Картана.* Она обладает следующими свойствами:

1° $(x, y) = (y, x)$;

2° $([x, y], z) = (x, [y, z])$;

3° $(x, y)_{X_0} = (x, y)_X$, если X_0 — идеал в X и $x, y \in X_0$

Мы не станем останавливаться на несложной проверке этих соотношений. Заметим, что свойство 2° может быть также записано в виде

2′ $(D_y x, z) + (x, D_y z) = 0.$

Следовательно, операторы D_y являются *кососимметричными* относительно этой формы.

Пусть $X^\perp$ — пространство всех векторов, ортогональных к каждому вектору из X. Если вектор x обладает этим свойством, то согласно 2′ тем же свойством обладает $D_y x$. Следовательно, $X^\perp$ является идеалом в X.

Особый интерес представляют два крайних случая: $X^\perp = X$ и $X^\perp = (0)$. В первом случае $(x, y) = 0$ тождественно на всей алгебре X, и это условие равносильно более частному условию $(x, x) = 0$, $x \in X$. Во втором случае форма называется *невырожденной* *). Докажем вначале, что имеет место

Теорема 3 (Критерий Картана). *Если $(x, x) = 0$ на всей алгебре X, то алгебра X является разрешимой.*

Доказательство. Ввиду возможности комплексного расширения $(X \to X + iX)$ мы можем считать, не ограничивая общности, что алгебра X является комплексной. Докажем вначале, что $X' \neq X$.

---

*) Если $(x, y) = a_{ij} x^i y^j$ относительно некоторого базиса в X, то условие невырожденности можно выразить формулой $\det \| a_{ij} \| \neq 0$.

Действительно, если $X = X' = [X, X]$, то для всякого разложения Фиттинга мы имеем $X_0 = \sum_\alpha [X_\alpha, X_{-\alpha}]$. Следовательно, подалгебра X_0 является линейной оболочкой коммутаторов вида $z = [x_\alpha, x_{-\alpha}]$. Согласно замечанию, сделанному в конце § 86, мы имеем

$$(z, z) = \operatorname{sp} \hat{z}^2 = \rho_2 \alpha(z)^2 = 0,$$

где $\rho_2 \neq 0$. Следовательно, $\alpha(z) = 0$ для всех коммутаторов z, а потому и для всех элементов из X_0. Но это означает, что все корни относительно X_0 нулевые, т. е. $X = X_0$. Следовательно, алгебра X нильпотентна и $X' \neq X$ вопреки допущению.

Итак, $X' \neq X$. В силу свойства 3° формы Киллинга — Картана $(x, x) = 0$ также на подалгебре X'. Следовательно, $X'' \neq X'$ и т. д. Следовательно, $X^{(p)} = (0)$ при достаточно высоком p, т. е. алгебра X разрешима. Теорема доказана.

Как легко убедиться на простых примерах, обратное утверждение неверно, т. е. (x, x) не обязательно равно нулю для всякой разрешимой алгебры X *). Однако имеет место

Теорема 4. *Алгебра X разрешима тогда и только тогда, когда $(X, X') = 0$ для производной подалгебры X'.*

Доказательство. Если $(x, y) = 0$ для $x \in X'$, $y \in X$, то, в частности, $(x, x) = 0$ для $x \in X'$. Следовательно, алгебра X' разрешима. Поскольку фактор-алгебра X/X' коммутативна, то она также разрешима. Следовательно (см. § 84), алгебра X также разрешима.

С другой стороны, если алгебра X разрешима, то подалгебра X' нильпотентна (§ 85). Приводя операторы D_a, $a \in X$, к треугольной форме (в вещественном случае — к квазитреугольной), замечаем, что собственные значения (диагональные блоки) оператора D_x равны нулю, если $x \in X'$. Следовательно, $(a, x) = \operatorname{sp} D_a D_x = 0$. Теорема доказана.

Покажем теперь, что в терминах билинейной формы Киллинга — Картана можно также дать независимую характеристику полупростых алгебр Ли.

*) Однако если алгебра X нильпотентна, то оператор D_x нильстепенен, откуда $(x, x) \equiv 0$.

Теорема 5. *Алгебра X является полупростой тогда и только тогда, когда билинейная форма (x, y) невырождена.*

Доказательство. Если алгебра X проста, то X не содержит ни одного идеала, кроме (0) и X; в частности, $[X, X] = X$, и алгебра X не может быть разрешимой. Если алгебра X полупроста, то всякий ее идеал является суммой простых подалгебр. Следовательно, алгебра X не содержит ни одного разрешимого идеала, кроме (0). В то же время, если положим $Y = X^{\perp}$, то на Y форма Киллинга — Картана обращается в нуль, откуда следует, что Y — разрешимый идеал (теорема 3). Следовательно, $Y = (0)$, и форма Киллинга — Картана невырождена.

С другой стороны, предположим, что билинейная форма (x, y) невырождена, и покажем, что присоединенное представление в алгебре X вполне приводимо. Если Y — идеал, то его ортогональное дополнение $Y^{\perp}$ в виду 2′ также является идеалом. Следовательно, $Z = Y \cap Y^{\perp}$ также является идеалом. Полагая $a, b \in Z$, получаем из тождества Якоби, что $[a, b] \perp X$, откуда $[a, b] = 0$, т. е. Z — абелев идеал. Если $z \in Z$, $x \in X$, то оператор $D_x D_z$ переводит X в Z, Z в (0), откуда следует, что $(x, z) = \operatorname{sp} D_x D_z = 0$, т. е. $Z \perp X$. В результате $Z = (0)$. Отсюда $X = Y + Y^{\perp}$ (прямая сумма). Действительно, если вектор z ортогонален $Y + Y^{\perp}$, то $z \in Z$, откуда $z = 0$. Мы показали, что алгебра X редуктивна. Если Z — центр алгебры X, то $D_z = 0$, $z \in Z$, откуда, как и выше, заключаем, что $Z = (0)$. Следовательно, алгебра X полупроста. Теорема доказана.

Следствие 1. *Алгебра X полупроста тогда и только тогда, когда она не содержит ни одного разрешимого идеала, кроме* (0).

Следствие 2. *Алгебра X полупроста тогда и только тогда, когда она не содержит ни одного коммутативного идеала, кроме* (0).

Следствие 3. *Условие полупростоты можно также записывать в виде* $[X, X] = X$.

Доказательства (несложные) предоставляются читателю. Каждое из приведенных условий может быть выбрано в качестве независимого определения полупростой

алгебры Ли. В заключение этого параграфа получим еще один результат как следствие теоремы 5:

Теорема 6. *Если алгебра X полупроста, то всякое ее дифференцирование является внутренним.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}$ — алгебра всех дифференцирований и $\mathfrak{X}$ — подалгебра, образованная внутренними дифференцированиями D_x, $x \in X$. Поскольку алгебра X имеет нулевой центр, то представление D_x является точным, и алгебра $\mathfrak{X}$ полупроста. Далее, если D — дифференцирование и $y = Dx$, то легко проверить формулу

$$[D, D_x] = D_y,$$

из которой следует, что $\mathfrak{X}$ является идеалом в $\mathfrak{D}$. Но тогда ортогональное дополнение $\mathfrak{X}^\perp$ к идеалу $\mathfrak{X}$ относительно скалярного произведения $(A, B) = \operatorname{sp} AB$ также является идеалом в $\mathfrak{D}$. Из невырожденности формы в идеале $\mathfrak{X}$ следует, что уравнение $d - a \perp \mathfrak{X}$ разрешимо относительно $a \in \mathfrak{X}$ для любого $d \in \mathfrak{D}$. Следовательно, $\mathfrak{D} = \mathfrak{X} + \mathfrak{X}^\perp$. Пересечение $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{X}^\perp$ ортогонально к $\mathfrak{X}$ во всей алгебре $\mathfrak{D}$, но тогда и в идеале $\mathfrak{X}$ (свойство 3° формы Киллинга — Картана); следовательно, $\mathfrak{Z} = (0)$ (ибо $\mathfrak{X}$ полупроста). Оператор $D_y = [D, D_x]$ содержится как в идеале $\mathfrak{X}$, так и в идеале $\mathfrak{X}^\perp$, если $D \in \mathfrak{X}^\perp$; следовательно, $D_y \in \mathfrak{Z}$ и $D_y = 0$. Но тогда также $y = Dx = 0$ для всякого $x \in X$, откуда $D = 0$. В результате $\mathfrak{X}^\perp = (0)$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Упражнение

Выразить условие полупростоты алгебры Ли в терминах структурных констант c_{ij}^k.

§ 88. Основные типы групп Ли

Если рассматривать только связные группы Ли, то для получения их классификации можно непосредственно воспользоваться результатами классификации для алгебр Ли. Связная группа Ли называется *редуктивной*, *полупростой*, *простой*, *разрешимой*, *нильпотентной* или *абелевой*, если ее алгебра Ли относится к одному из перечисленных типов. Однако в случае несвязных групп такой подход уже нежелателен, поскольку свойства