алгебры Ли. В заключение этого параграфа получим еще один результат как следствие теоремы 5:

Теорема 6. *Если алгебра X полупроста, то всякое ее дифференцирование является внутренним.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}$ — алгебра всех дифференцирований и $\mathfrak{X}$ — подалгебра, образованная внутренними дифференцированиями D_x, $x \in X$. Поскольку алгебра X имеет нулевой центр, то представление D_x является точным, и алгебра $\mathfrak{X}$ полупроста. Далее, если D — дифференцирование и $y = Dx$, то легко проверить формулу

$$[D, D_x] = D_y,$$

из которой следует, что $\mathfrak{X}$ является идеалом в $\mathfrak{D}$. Но тогда ортогональное дополнение $\mathfrak{X}^\perp$ к идеалу $\mathfrak{X}$ относительно скалярного произведения $(A, B) = \operatorname{sp} AB$ также является идеалом в $\mathfrak{D}$. Из невырожденности формы в идеале $\mathfrak{X}$ следует, что уравнение $d - a \perp \mathfrak{X}$ разрешимо относительно $a \in \mathfrak{X}$ для любого $d \in \mathfrak{D}$. Следовательно, $\mathfrak{D} = \mathfrak{X} + \mathfrak{X}^\perp$. Пересечение $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{X}^\perp$ ортогонально к $\mathfrak{X}$ во всей алгебре $\mathfrak{D}$, но тогда и в идеале $\mathfrak{X}$ (свойство 3° формы Киллинга — Картана); следовательно, $\mathfrak{Z} = (0)$ (ибо $\mathfrak{X}$ полупроста). Оператор $D_y = [D, D_x]$ содержится как в идеале $\mathfrak{X}$, так и в идеале $\mathfrak{X}^\perp$, если $D \in \mathfrak{X}^\perp$; следовательно, $D_y \in \mathfrak{Z}$ и $D_y = 0$. Но тогда также $y = Dx = 0$ для всякого $x \in X$, откуда $D = 0$. В результате $\mathfrak{X}^\perp = (0)$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Упражнение

Выразить условие полупростоты алгебры Ли в терминах структурных констант c_{ij}^k.

§ 88. Основные типы групп Ли

Если рассматривать только связные группы Ли, то для получения их классификации можно непосредственно воспользоваться результатами классификации для алгебр Ли. Связная группа Ли называется *редуктивной*, *полупростой*, *простой*, *разрешимой*, *нильпотентной* или *абелевой*, если ее алгебра Ли относится к одному из перечисленных типов. Однако в случае несвязных групп такой подход уже нежелателен, поскольку свойства

дискретной фактор-группы G/G_e, где G_e — компонента единицы, при этом совершенно не учитываются. Так, в предельном случае, когда группа G сама дискретна (т. е. алгебра Ли равна (0)), мы вообще не получаем информации о структуре группы G. Кроме того, определения разрешимости, нильпотентности и коммутативности естественно формулируются не только для групп Ли, но вообще для произвольных групп.

Пусть G — произвольная группа. Множество $K \subset G$ называется *коммутаторной подгруппой*, если K состоит из всевозможных коммутаторов вида $k = aba^{-1}b^{-1}$, a, $b \in G$, и их произведений в любом (конечном) числе. Если G — топологическая группа, то вместо K рассматривают обычно замыкание этого множества в топологии G. Полученное множество снова является группой; оно обозначается G' и называется *производной подгруппой* в группе G.

Определение 1. Группа G называется *разрешимой*, если $G^{(p)} = \{e\}$ при некотором p.

Здесь $G^{(p)}$ — кратная производная группы G, определяемая рекуррентно: $G^{(p)} = [G^{(p-1)}, G^{(p-1)}]$, где квадратные скобки заменяют обозначение производной. Аналогично можно ввести понятие *центрального ряда* группы G. Мы полагаем $G_0 = G$, $G_1 = G'$. Далее, подгруппа G_p определяется как $[G, G_{p-1}]$, т. е. как замкнутая подгруппа в G_{p-1}, порожденная коммутаторами вида $k = aba^{-1}b^{-1}$, $a \in G$, $b \in G_{p-1}$. Нетрудно видеть, что G_p является нормальным делителем не только в G_{p-1}, но и во всей группе G.

Определение 2. Группа G называется *нильпотентной*, если $G_p = \{e\}$ при некотором p.

В частности, группа G является *абелевой*, если $G_1 = G' = \{e\}$, т. е. если $ab = ba$ для всех a, $b \in G$. Следовательно, определения нильпотентности и разрешимости являются естественными обобщениями понятия коммутативности. Как следует из данных определений, $G^{(p)} \subset (G')_{p-1}$. Отсюда нетрудно получить следующее утверждение: *группа G разрешима тогда и только тогда, когда ее производная подгруппа нильпотентна.*

Для разрешимой связной группы имеет место также аналог фундаментальной теоремы Ли:

Теорема Ли. *Если G — разрешимая связная группа, то всякое ее неприводимое представление в комплексном пространстве одномерно* *).

Доказательство. Минимальное из чисел p, для которых $G^{(p)} = \{e\}$, назовем *рангом* группы. Если ранг равен единице, то теорема верна. Далее будем вести индукцию по рангу.

Пусть V — пространство представления T_g группы G и V_0 — подпространство, неприводимое относительно T_g. Нетрудно видеть, что G' вместе с G является разрешимой связной группой. Поскольку ранг G' меньше ранга G, мы можем считать по допущению индукции, что V_0 одномерно. Следовательно,

$$T_h\xi_0 = \lambda(h)\,\xi_0$$

для $h \in G'$ и $\xi_0 \in V_0$. Применим к вектору ξ_0 произвольный оператор T_g и выясним действие оператора T_h на каждый элемент орбиты $\xi_g = T_g\xi$. Поскольку G' является нормальным делителем в G, то мы имеем $hg = g(g^{-1}hg) = g\tilde{h}$, где $\tilde{h} \in H$. Следовательно,

$$T_h\xi_g = T_g T_{\tilde{h}}\xi_0 = \lambda(\tilde{h})\,\xi_g.$$

Следовательно, всякий вектор ξ_g снова является собственным вектором относительно T_h с собственным значением $\lambda_g(h) = \lambda(g^{-1}hg)$. Далее существенно используется конечномерность V и связность группы G. Из первого условия следует, что функция $\lambda_g(h)$ при переменном g может принимать значения лишь из конечного множества Λ, где $\Lambda = \{\mu(h)\}$ — множество всех «весов» представления T_h. Из второго условия следует, что λ_g непрерывно зависит от g. Сопоставляя эти утверждения, заключаем, что λ_g не зависит от g, т. е. $\lambda(g^{-1}hg) = \lambda(h)$ для всех $g \in G$. Положим

$$V_\lambda = \{\xi \in V,\ T_h\xi = \lambda(h)\,\xi\},$$

где $\lambda = \lambda(h)$ фиксировано. Мы видим, что V_λ инвариантно в V относительно всей группы G; следовательно,

*) В вещественном пространстве — не более чем двумерно и коммутативно. Мы для простоты рассматриваем комплексный случай.

$V_\lambda = V$. Если h является коммутатором, $h = aba^{-1}b^{-1}$, то $\det T_h = 1$, откуда заключаем, что

$$\lambda(h)^n = 1, \qquad n = \dim V,$$

для всех коммутаторов $h \in G'$, но тогда и для всех элементов из G'. Из связности G' и непрерывности $\lambda(h)$ заключаем, что $\lambda(h) = 1$. Следовательно, $T_h \equiv I$, где I — единичный оператор в V, и представление T_g коммутативно. Но тогда по лемме Шура V одномерно. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что для связных групп Ли определения 1 и 2 равносильны определениям в терминах алгебры Ли. В то же время определения простоты, полупростоты и редуктивности, данные в начале этого параграфа, принято переносить на произвольные (не обязательно связные) группы Ли. Мы сформулируем эти определения также в глобальной форме.

Определение 3. Группа Ли называется *простой*, если она не содержит ни одного замкнутого связного нормального делителя.

Определение 4. Группа Ли называется *полупростой*, если она не содержит ни одного замкнутого связного разрешимого нормального делителя.

Определение 5. Группа Ли называется *редуктивной*, если ее фактор-группа по центру полупроста.

Эквивалентность этих определений определениям, данным в начале параграфа, не очевидна. Действительно, мы видели в § 40, что некоторым подалгебрам в алгебре Ли не соответствуют замкнутые подгруппы в соответствующей группе Ли. Однако можно показать, используя некоторые результаты А. И. Мальцева [109], что в определениях 3, 4 вместо слов «замкнутый нормальный делитель» можно использовать термин «локально замкнутый нормальный делитель» (замкнутый хотя бы в окрестности единицы). В такой формулировке определения 3, 4, очевидно, эквивалентны определениям, данным в начале параграфа. Это следует из взаимно однозначного соответствия между локально замкнутыми подгруппами и подалгебрами в алгебре Ли.

Заметим, что в определении 4 вместо разрешимого нормального делителя можно ограничиться коммутатив-

ными нормальными делителями (см. следствие 2 из теоремы 5). Заметим также, что всякий нормальный делитель в простой связной группе Ли является дискретным и центральным. Действительно, дискретность следует из определения 3; в то же время мы видели в § 5, что в связной группе G всякий дискретный нормальный делитель централен.

Ясно также, что простые и полупростые группы Ли могут иметь только дискретный центр.

§ 89. Теорема Леви — Мальцева

Проведенная выше классификация не является полной в том смысле, что существуют группы (алгебры) Ли, которые не относятся ни к одному из выделенных классов. В частности, это верно даже для такой классической группы, как группа движений евклидова пространства (включающая повороты и трансляции). Оказывается, однако, что любая группа (или алгебра) Ли может быть (в известном смысле) составлена из отдельных подгрупп, каждая из которых уже относится к перечисленным выше классам.

Рассмотрим вначале алгебры Ли. Пусть X — такая алгебра и R — ее максимальный разрешимый идеал. Подалгебра R называется *радикалом* в алгебре X *). Очевидно, фактор-алгебра X/R уже не содержит разрешимых нормальных делителей. Следовательно, алгебра X/R полупроста.

Теорема 7 (Леви — Мальцев). *Всякая алгебра Ли может быть разложена (как линейное пространство) в прямую сумму своего радикала R и полупростой подалгебры S:*

$$X = R + S.$$

Подалгебра S является максимальной полупростой подалгеброй в алгебре X. Она определяется однозначно с точностью до автоморфизма.

Мы не будем приводить доказательства этой теоремы, поскольку оно является достаточно сложным и это

*) Можно показать, что R определяется в X однозначно.